

# MAT0330 – Trabalho Escrito

## Forcing em Topos

Guilherme de Sousa Sobreira  
& Thiago Brevidegli Garcia  
& Guilherme Cerqueira Gonçalves  
& Gabriel Bassan dos Santos

Julho de 2021

### Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Topos</b>	<b>2</b>
2.1	Topos de Grothendieck . . . . .	2
2.2	Topos Elementares . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Por que topos são um bom ambiente para a teoria dos conjuntos?</b>	<b>10</b>
3.1	Nem tudo são flores... . . . .	11
<b>4</b>	<b>O topos de Cohen</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>Preservação de Monomorfismos</b>	<b>14</b>
5.1	A construção de $\text{Epi}(X, Y)$ . . . . .	14
5.2	$\text{Sh}(\mathbb{P})$ não adiciona epimorfismos . . . . .	17

## 1 Introdução

Desde a introdução da teoria de feixes na topologia, iniciada por Jean Leray no final dos anos 40, entender o comportamento de feixes em espaços se tornou alvo de grande interesse. Com a crescente influência da teoria de categorias, se foi entendido que feixes sobre um espaço  $X$  se organizavam em uma categoria  $\text{Sh}(X)$  e que o estudo de tal categoria refletia diretamente propriedades do próprio espaço. Influenciado por tais ideias, Jean-Pierre Serre introduziu em 1955 o uso da teoria de feixes na geometria algébrica, iniciando uma revolução na área. Seguindo as ideias de Serre, Alexander Grothendieck se tornou a figura principal no que viria a se tornar uma revolução na geometria algébrica com o objetivo de provar as *conjecturas de Weil*. Rapidamente se percebeu que a topologia de variedades algébricas era fraca demais para que a categoria de feixes associada desse a resposta esperada das conjecturas. Com isso em mente, Grothendieck entendeu que para provar as conjecturas teria que trabalhar em um “espaço” mais geral do que a própria variedade algébrica. Assim, nasce por volta de 1963 a primeira noção de um *topos* (hoje em dia conhecido como topos de Grothendieck) e com ela, o início das demonstrações das conjecturas de Weil. Aqui vemos a primeira faceta da teoria de topos: um topos é um “espaço generalizado”.

Por outro lado, durante os anos 60, Francis William Lawvere tentava desenvolver uma fundamentação categórica para a matemática. Influenciado pelas ideias de Grothendieck, Lawvere observou que um topos de Grothendieck admite operações comuns na teoria de conjuntos, como conjuntos de funções e conjuntos das partes. Ao mesmo tempo, Myles Tierney se deu conta de que o estudo de

topos de Grothendieck poderia se dar de maneira axiomática. Com essas ideias em mente, Lawvere e Tierney finalmente introduziram, no final dos anos 60, a noção de um *topos elementar*, que em um certo sentido “categorizava” propriedades esperadas de uma boa teoria de conjuntos ao mesmo tempo que englobava a teoria de topos de Grothendieck. Aqui vemos a segunda faceta da teoria de topos: um topos é um “universo generalizado de conjuntos”.

Também durante a década de 60, Paul Cohen se debruçava sobre o primeiro dos Problemas de Hilbert, e maior problema em aberto da teoria dos conjuntos na época: a independência da Hipótese do Continuum. Ao passo em que já era conhecida a consistência de CH com ZFC pela descoberta da classe dos construtíveis, por Kurt Gödel no início década de 40, também se sabia que seria necessário o uso de uma técnica completamente nova para a construção de um modelo de ZFC onde  $\aleph_1 < 2^{\aleph_1}$ . Inspirado pelo trabalho de Gödel, Cohen desenvolve o método do forcing, por meio do uso de ordens parciais de “aproximações finitas” a um objeto  $G$  que seria adicionado ao modelo, e do controle do modelo estendido  $V[G]$  com o que Cohen chamou de “nomes”.

Nas décadas subsequentes, forcing viria a se tornar o objeto de estudo central da teoria dos conjuntos, e conseqüentemente diversas releituras do método original de Cohen surgiram. A primeira, de Dana Scott, trocou o uso de ordens parciais pelo de álgebras booleanas, reformulando a construção de  $V[G]$  e facilitando imensamente a compreensão e demonstração dos lemas técnicos envolvendo lógica e teoria dos modelos presentes no método.

Neste trabalho, trataremos da reformulação de forcing no ambiente encontrado por Lawvere e Tierney, em vista da natureza lógica e conjuntista intrínseca à teoria de topos.

Vamos agora fazer um pequeno panorama das seções do trabalho.

- (2) Nesta seção iremos definir as duas noções de topos e nos aprofundar brevemente em cada uma delas, começando por topos de Grothendieck e logo em seguida indo para topos elementares.
- (3) Aqui faremos uma breve discussão sobre as propriedades “conjuntistas” de um topos, tentando explicitar a relação entre topos e “universos de conjuntos”, sem entrar em detalhes técnicos.
- (4) Nesta seção construiremos um topos cuja lógica interna se aproxima bastante de *ZFC*, mas onde não vale a hipótese do contínuo, o chamado *topos de Cohen*. Este processo será um exemplo de forcing em topos e será o tema principal do texto como um todo.
- (5) Nesta seção finalmente completaremos as pontes técnicas necessárias para a prova do processo de forcing no topos de Cohen.

Antes de começar o trabalho propriamente dito, vamos fazer alguns avisos:

- Para evitar que o trabalho se torne muito extenso, assumiremos conhecimentos básicos da teoria de categorias.
- Durante o trabalho não mencionaremos problemas conjuntistas da teoria de categorias. Isto não será um grande problema pois todas as categorias de fato utilizadas nas partes mais “concretas” serão ao menos localmente pequenas, de maneira que tais problemas não serão relevantes.
- Em alguns momentos, serão feitas discussões e comparações com o forcing usual, mas em vista da natureza deste trabalho, não trataremos de seus métodos e técnicas previamente a tais discussões. Em [2], sua construção pode ser encontrada em detalhes.

## 2 Topos

### 2.1 Topos de Grothendieck

Vamos brevemente recordar as definições e principais conseqüências da teoria de topos de Grothendieck. Para isto, começaremos com a definição de crivos e de topologias de Grothendieck em uma categoria.

**Definição 2.1.1.** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria. Dado um objeto  $C \in \mathcal{C}$ , um *crivo* sobre  $C$  é uma coleção  $S$  de morfismos com codomínio  $C$  satisfazendo a seguinte propriedade

$$(f: D \rightarrow C) \in S \implies f \circ g \in S$$

para qualquer  $g: D' \rightarrow D$ .

Equivalentemente, podemos definir um crivo sobre  $C$  como um subobjeto (na categoria de funtores)  $S \subseteq h_C$ , onde  $h_C$  é a imagem de  $C$  pelo *mergulho de Yoneda* dado por  $D \mapsto \text{Hom}(D, C)$ . Por razões práticas, vamos lembrar o lema de Yoneda e o mergulho de Yoneda.

**Proposição 2.1.1** (Lema de Yoneda). *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria e  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  um funtor. Então para cada  $C \in \mathcal{C}$  existe uma bijeção natural*

$$\text{Nat}(h_C, F) \cong F(C)$$

que é funtorial em  $C$  e em  $F$ .

**Corolário 2.1.1** (Mergulho de Yoneda). *O funtor  $h: \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{PSh}(\mathcal{C}) := \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$  dado por*

$$C \mapsto h_C$$

*é plenamente fiel (ou seja, um mergulho).*

Perceba que se  $S$  é um crivo sobre  $C$  e  $h: D \rightarrow C$  é um morfismo qualquer, então

$$h^*(S) := \{g: D' \rightarrow D \mid h \circ g \in S\}$$

é um crivo sobre  $D$ , chamado de *pullback* de  $S$  por  $h$ . Podemos agora definir um topologia de Grothendieck.

**Definição 2.1.2** (Topologia de Grothendieck). *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria. Uma topologia de Grothendieck em  $C$  é uma função  $J$  que associa a cada objeto  $C \in \mathcal{C}$  uma coleção  $J(C)$  de crivos sobre  $C$  satisfazendo as condições seguintes*

- (I) A coleção de todos os morfismos com codomínio  $C$  pertence a  $J(C)$  (tal crivo é chamado de crivo maximal e denotado por  $t_C$ ).
- (II) Se  $S \in J(C)$ , então para qualquer morfismo  $h: D \rightarrow C$  temos que  $h^*(S) \in J(D)$ .
- (III) Se  $S \in J(C)$  e  $R$  é um crivo qualquer sobre  $C$  tal que  $h^*(R) \in J(D)$  para todo  $h: D \rightarrow C$  com  $h \in S$ , então  $R \in J(C)$ .

Com esta definição em mãos, podemos definir um *site*, que será para nós um par  $(\mathcal{C}, J)$  onde  $\mathcal{C}$  é uma categoria e  $J$  uma topologia de Grothendieck em  $\mathcal{C}$ . Nesse contexto, dizemos que um crivo  $S$  sobre  $C$  cobre  $C$  se  $S \in J(C)$ . Vamos ver agora alguns exemplos.

**Exemplo 2.1.1.** *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria. A topologia onde  $J(C)$  é apenas o crivo maximal é chamada de topologia trivial em  $\mathcal{C}$ .*

**Exemplo 2.1.2.** *Seja  $X$  um espaço topológico. Denote por  $\mathcal{O}(X)$  o poset de abertos de  $X$ .  $\mathcal{O}(X)$  pode ser visto como uma categoria cujos objetos são os abertos de  $X$  e onde  $U \rightarrow V$  se e só se  $U \subseteq V$ . Neste contexto, um crivo  $S$  sobre  $U$  pode ser identificado com uma coleção de abertos  $V \subseteq U$  tais que  $V' \subseteq V \in S \implies V' \in S$ . Definimos então uma topologia de Grothendieck dada por*

$$J(U) = \left\{ S \text{ crivo sobre } U \mid U = \bigcup_{V \in S} V \right\}$$

*Ou seja, um crivo  $S$  cobre  $U$  se e só se  $S$  é uma cobertura de  $U$  no sentido topológico.*

**Exemplo 2.1.3.** Dado um poset  $\mathbb{P}$  podemos novamente ver  $\mathbb{P}$  como uma categoria onde  $q \longrightarrow p$  se e só se  $q \leq p$ . Definimos então uma topologia em  $\mathbb{P}$  dada por

$$J(p) = \{S \text{ crivo sobre } p \mid S \text{ é denso em } p\downarrow\}$$

Esta topologia será muito importante neste texto. Nos referiremos a ela comumente como a topologia densa ou a topologia “double negation”, denotada por  $J_{\neg\neg}$ .

Agora que definimos topologias de Grothendieck, vamos definir o objeto principal desta seção, feixes em um site.

**Definição 2.1.3.** Seja  $(\mathcal{C}, J)$  um site. Dado um pré-feixe  $P \in \mathbf{PSh}(\mathcal{C})$ , dizemos que  $P$  é um feixe se para todo  $C \in \mathcal{C}$ ,  $S \in J(C)$  e para toda família  $\{x_f\}_{f \in S}$ , onde  $f: D \longrightarrow C$  e  $x_f \in P(D)$ , tal que

$$P(g)(x_f) = x_{fg} \quad (\text{para todo } g: D' \longrightarrow D)$$

existe um único elemento  $x \in P(C)$  tal que

$$P(f)(x) = x_f \quad (\text{para todo } f \in S)$$

Denotamos então por  $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$  a subcategoria cheia de  $\mathbf{PSh}(\mathcal{C})$  cujos subobjetos são feixes. Chegamos assim a definição de um topos de Grothendieck.

**Definição 2.1.4.** Uma categoria  $\mathcal{C}$  é dita um *topos de Grothendieck* se é equivalente a uma categoria de feixes  $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$  sobre um site  $(\mathcal{C}, J)$ .

**Exemplo 2.1.4.** Se  $J$  é a topologia trivial em alguma categoria  $\mathcal{C}$ , então  $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J) = \mathbf{PSh}(\mathcal{C})$ .

**Exemplo 2.1.5.**  $\mathbf{Set}$  é um topos de Grothendieck dado por  $\mathbf{PSh}(\ast)$ , onde  $\ast$  é a categoria com um único objeto e um único morfismo.

**Exemplo 2.1.6.** Se  $\mathcal{C} = \mathcal{O}(X)$  para algum espaço topológico  $X$  e  $J$  é a topologia induzida por  $X$ , temos que  $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J) = \mathbf{Sh}(X)$ , isto é, a noção usual de feixes sobre espaços topológicos.

Se  $\mathbb{P}$  é um poset, denotaremos  $\mathbf{Sh}(\mathbb{P}, J_{\neg\neg})$  apenas por  $\mathbf{Sh}(\mathbb{P})$ . Esta categoria será extremamente importante para o restante deste texto. Por fim, enunciamos algumas proposições que nos serão úteis.

**Proposição 2.1.2.** *Seja  $(\mathcal{C}, J)$  um site. A inclusão*

$$\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J) \hookrightarrow \mathbf{PSh}(\mathcal{C})$$

*possui adjunto à esquerda  $\alpha: \mathbf{PSh}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ , chamado de feixificação. Além disso, o funtor  $\alpha$  preserva limites finitos.*

**Proposição 2.1.3.** *Dada uma categoria  $\mathcal{C}$ , existe um funtor  $\Gamma: \mathbf{PSh}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Set}$  com adjunto à esquerda  $\Delta: \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{PSh}(\mathcal{C})$ . Além disso,  $\Delta$  preserva limites finitos.*

## 2.2 Topos Elementares

Agora, vamos definir uma segunda noção de um topos, chamada de topos elementar. Veremos a sua definição e depois detalharemos cada um dos requisitos Categóricos para entender a estrutura. Esta parte das notas é baseada majoritariamente em [5, 3]. Vale a pena destacar que na literatura o nome topos normalmente se refere a topos de Grothendieck, neste trabalho adotaremos a nomenclatura contrária, um topos sempre será um topos elementar.

**Definição 2.2.1.** Um topos (elementar) é uma categoria  $\mathcal{C}$  tal que:

- (i)  $\mathcal{C}$  é cartesianamente fechada.

(ii)  $\mathcal{E}$  possui todos os limites finitos.

(iii)  $\mathcal{E}$  possui classificador de subobjeto.

**Observação 1.** É um teorema difícil o fato de que os axiomas acima implicam que  $\mathbb{E}$  possui colimites finitos. De qualquer maneira isto será usado nas próximas seções.

**Exemplo 2.2.1.** Nossos exemplos teste<sup>1</sup> serão as categorias **Set** e **FinSet** (categoria cujos objetos são conjuntos finitos e os morfismos são funções) que são ambas *topos*<sup>2</sup> como veremos a diante.

Para entender a definição de cartesianamente fechado vamos definir algumas estruturas primeiro:

**Definição 2.2.2.** Dados dois objetos  $A, B$  de uma categoria  $\mathcal{E}$  o *produto binário de  $A$  e  $B$* , também chamado *diagrama produto*, consiste de um objeto  $P$  e duas flechas  $p_1, p_2$  satisfazendo:

$$A \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} B$$

Com a propriedade de que dado qualquer objeto  $T$  e flechas  $k : T \rightarrow A$  e  $h : T \rightarrow B$  temos que existe uma única flecha  $u : T \rightarrow P$  que faz o diagrama abaixo comutar:

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ A & \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} & B \\ & \uparrow u & \\ & k & h \end{array}$$

Vale notar que o *produto binário* de  $A$  e  $B$  pode não existir ou podem existir múltiplos objetos nessa condição, sendo eles isomorfos entre si, então é comum tomar um "representante canônico" e faremos isso constantemente ao longo destas notas para evitar fazer este tipo de comentário o tempo inteiro. A maior parte das construções categóricas ou objetos definidos seguem este mesmo padrão. Caso não tenha sido entendido, acreditamos que fique claro com o próximo exemplo.

**Exemplo 2.2.2.** Em **Set** e **FinSet** temos que o *produto binário* é um objeto isomorfo ao *produto cartesiano*, então escolhe-se o *produto cartesiano* usual como "representante canônico" e representaremos o produto de dois objetos  $A$  e  $B$  nessas categorias por  $A \times B$ .<sup>3</sup>

**Exemplo 2.2.3.** Há outros exemplos tradicionais dessa construção que o leitor pode estar familiarizado, **mas que não são necessariamente Topos**, como **Man** (categoria cujo objetos são as variedades suaves de dimensão finita e os morfismos são funções suaves) e **Top** (categoria cujos objetos são espaços Topológicos e os morfismos são funções contínuas). O *produto binário* nessas categorias é também o usual produto cartesiano dos espaços, com as respectivas estruturas adicionais.

**Definição 2.2.3.** Seja  $\mathcal{E}$  uma categoria com todos os produtos binários,  $B$  e  $C$  objetos de  $\mathcal{E}$ . Um objeto exponencial consiste de um objeto  $C^B$  e um morfismo  $ev : C^B \times B \rightarrow C$  satisfazendo a seguinte propriedade:

Dado qualquer objeto  $A$  e qualquer morfismo  $f : A \times B \rightarrow C$  existe um único morfismo  $\tilde{f} : A \rightarrow C^B$  tal que  $ev \circ (\tilde{f} \times id_B) = f$ . Em termos dos diagramas:

$$\begin{array}{ccc} C^B & & C^B \times B \xrightarrow{ev} C \\ \uparrow \tilde{f} & & \uparrow \tilde{f} \times id_B \quad \nearrow f \\ A & & A \times B \end{array}$$

<sup>1</sup>Exemplos primários em que vamos inicialmente testar as estruturas.

<sup>2</sup>porém **FinSet** não é de Grothendieck!

<sup>3</sup>Possivelmente usaremos essa notação em outras categorias para evitar sobrecarregar a notação.

Dizemos que  $ev$  é o *mapa de avaliação* e  $\tilde{f}$  é a *transposta exponencial* de  $f$ . Por outro lado, se tivermos  $g : A \rightarrow C^B$ , escrevemos  $\bar{g} = ev \circ (g \times id_B) : A \times B \rightarrow C$  e chamamos  $\bar{g}$  de *transposta de  $g$* . Pela unicidade da *transposta exponencial*, obtemos  $\tilde{\bar{g}} = g$ . Mais ainda, também temos  $\tilde{f} = f$  para toda  $f : A \times B \rightarrow C$ .

**Exemplo 2.2.4.** Em **Set** e **FinSet** a ideia é a exponencial de conjuntos usual, pensada como “espaço de funções de um objeto a outro”.

Observe que **Man** não possui objeto exponencial pois apesar de existir uma definição para  $M^N$  em que  $M$  e  $N$  são variedades, nessa definição  $M^N$  é variedade de dimensão infinita logo não é objeto de **Man**.

**Definição 2.2.4.** Dizemos que uma categoria é *cartesianamente fechada* se tiver produtos binários e se cada objeto  $B$  e  $C$  admitir objeto exponencial  $C^B$ .<sup>4</sup>

Note que nesse caso para cada objeto  $B$  podemos definir um funtor  $(-)^B : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  e esse funtor é adjunto à direita do funtor  $(-) \times B$ . Assim, por propriedade da adjunção, temos um isomorfismo  $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(B \times A, C) \cong \text{Hom}_{\mathcal{E}}(A, C^B)$ .

Com a definição de *cartesianamente fechado* e algumas propriedades básicas em mãos, passaremos para nosso próximo conceito, e para isso faremos duas definições anteriores, as de *objetos finais* e *pullbacks*.

**Definição 2.2.5.** Um *objeto final* de uma Categoria é um objeto, que usualmente chamaremos de  $\mathbb{1}$ , tal que para todo outro objeto existe exatamente uma flecha para  $\mathbb{1}$ .

**Exemplo 2.2.5.** Para **Set** e **FinSet** o *objeto final* é um conjunto com um só elemento<sup>5</sup>. Vendo este exemplo temos o indício de que é possível que em uma categoria qualquer possa não existir objeto final, e que se existir pode haver mais de um, mas serão isomorfos entre si como esperado.

Veremos agora superficialmente sobre *pullbacks*, que é uma construção central em aplicações da Teoria de Categorias. Teremos uma ideia de sua generalidade pelos exemplos.

**Definição 2.2.6.** Um *pullback* de duas flechas com codomínio comum<sup>6</sup>, digamos  $f : A \rightarrow C$  e  $g : B \rightarrow C$ , consiste de um objeto  $P$  e duas flechas, como no diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_2} & B \\ \downarrow p_1 & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

e a seguinte propriedade: o quadrado comuta e para qualquer objeto  $T$  e flechas  $h$  e  $k$  tal que o quadrado de fora comuta, então existe um único  $u : T \rightarrow P$  que faz o diagrama abaixo inteiro comutar:<sup>7</sup>

$$\begin{array}{ccccc} & & T & & \\ & & \swarrow u & \searrow k & \\ & & P & \xrightarrow{p_2} & B \\ & \swarrow h & \downarrow p_1 & & \downarrow g \\ & & A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

<sup>4</sup>Vale notar que na bibliografia do assunto as vezes pede-se que a categoria possua todos os limites finitos, porém se a categoria tem o produto binário para quaisquer dois elementos é possível provar que terá para qualquer quantidade finita de elementos.

<sup>5</sup>Por isso frequentemente pensamos em morfismos  $x : 1 \rightarrow X$  como pontos.

<sup>6</sup>Chamaremos construções desse tipo de *quinas de flechas*.

<sup>7</sup>Num certo sentido o objeto do *pullback* é o “minimal” que faz o diagrama comutar, dado que qualquer objeto que também “complete a quina de flechas” se decompõe nele.

**Exemplo 2.2.6.** Em **Set** ou **FinSet** alguns exemplos de construções vindas de pullback são, dados dois objetos  $A$  e  $B$ , a interseção e o produto,  $A \cap B$  e  $A \times B$  respectivamente. Vide diagramas abaixo:<sup>8</sup>

$$\begin{array}{ccc}
 A \cap B & \xrightarrow{p_2} & B \\
 \downarrow p_1 & & \downarrow g \\
 A & \xleftarrow{f} & C
 \end{array}
 \quad e \quad
 \begin{array}{ccc}
 A \times B & \xrightarrow{p_2} & B \\
 \downarrow p_1 & & \downarrow \\
 A & \longrightarrow & \mathbf{1}
 \end{array}$$

Nossa definição de possuir *todos os limites finitos* não é a usual, mas é equivalente a ela e para fins da teoria aqui feita será mais natural.

**Definição 2.2.7.** Uma categoria tem *todos os limites finitos* se possui *objeto final* e *pullback* para toda quina de flechas.

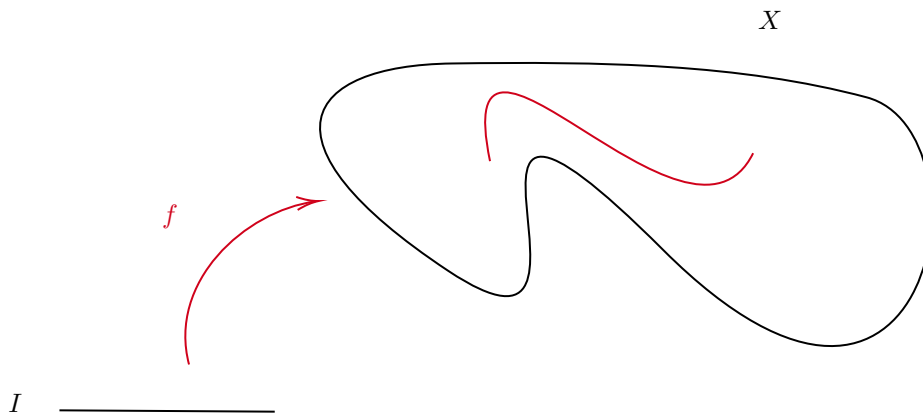
**Observação 2.** Como comentamos anteriormente, todo topos possui colimites finitos. Equivalentemente, todo topos possui *objeto inicial* e *pushforwards*.

Por fim, definiremos *classificador de subobjeto* que será central no estudo de Topos. Antes disso, falaremos um pouco sobre subobjetos.

**Definição 2.2.8.** Dado um objeto  $A$  de uma categoria, define-se um *subobjeto de  $A$*  como um *monomorfismo*, que são morfismos injetores, com codomínio  $A$ .

Se  $A$  e  $B$  são objetos de uma categoria usualmente escrevemos  $r : B \hookrightarrow A$  para  $r$  *subobjeto* de  $A$ , indicando que a flecha é injetora.

**Exemplo 2.2.7.** O subobjeto é visto como uma parte do seu codomínio, mas note que ele é uma flecha e não diretamente um objeto da categoria em questão. Uma forma usual de pensar nisso que deixa a noção de ver o subobjeto como flecha é pensar em uma curva simples em um Espaço Topológico. Nesse caso, imagina-se uma curva desenhada em uma espaço, mas ao tratar dela opera-se com a função em si e não a imagem da função.



**Definição 2.2.9.** Seja  $\mathcal{E}$  uma categoria com todos os limites finitos e  $\mathbf{1}$  seu objeto terminal. Um classificador de subobjeto em  $\mathcal{E}$  consiste de um objeto  $\Omega$  e um morfismo  $t : \mathbf{1} \rightarrow \Omega$  satisfazendo a seguinte propriedade:

<sup>8</sup>Note que o diagrama de produto em questão é "equivalente" ao visto na definição de produto pois o objeto final e os morfismos para ele poderiam ser omitidos dado que sempre existem e são únicos.

Dado qualquer objeto  $E$  e qualquer subobjeto  $r : U \hookrightarrow E$ , existe um único morfismo  $\chi_r : E \rightarrow \Omega$  que torna o diagrama abaixo um pullback:

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{1} \\ \downarrow r & & \downarrow t \\ E & \xrightarrow{\chi_r} & \Omega \end{array}$$

Temos que  $\Omega$  é conhecido como *objeto dos valores verdade*,  $\chi_r$  é *morfismo classificador* ou *morfismo característico* de  $r$  e  $t$  é o *morfismo verdade*.

Note que a condição de ser pullback nos dá que o classificador de subobjeto é único a menos de isomorfismo.

**Exemplo 2.2.8.** Seja  $\mathcal{E} = \mathbf{Set}$ ,  $\Omega = \{0, 1\}$  e  $t : \mathbb{1} \rightarrow \{0, 1\}$ . Tome  $E$  um objeto de  $\mathcal{E}$ , ou seja, um conjunto. Sabemos que todo subconjunto  $U$  de  $E$  possui uma única função característica  $\chi_U : E \rightarrow \{0, 1\}$ . Essa propriedade é exatamente a condição de ser classificador de subobjeto.

Classificador de subobjeto nos fornece um isomorfismo que será útil adiante, mas por motivos de brevidade destas notas não apresentaremos uma demonstração. O leitor interessado pode consultar o segundo capítulo de [5].

**Proposição 2.2.1.** *Uma categoria  $\mathcal{E}$  com limites finitos possui classificador de subobjeto se, e somente se, existe um objeto  $\Omega$  e um isomorfismo natural  $\eta$  onde*

$$\eta_X : \text{Sub}_{\mathcal{E}}(X) \cong \text{Hom}_{\mathcal{E}}(X, \Omega)$$

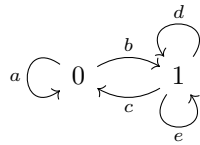
para todo  $X$  objeto de  $\mathcal{E}$ .

Com o exemplo anterior em mente, vale ressaltar que isso nos faz conseguir generalizar uma noção de *conjunto das partes* em um *Topos*, noção essa que será importantíssima na continuação destas notas.

Agora que temos todos os conceitos para entender que tipo de aparência um *Topos* tem em geral e analisamos suas especificidades nos nossos exemplos fundamentais de *Set* e *FinSet*, vamos ver alguns outros exemplos mais sofisticados e iniciar nossa discussão sobre a relação entre *Topos* e modelos para Teoria de Conjuntos, e ver como *forcing* se traduz nesse novo contexto.

**Exemplo 2.2.9.** A categoria **Quiv** dos quivers (grafos orientados com loops) e dos morfismos de quiver é um topos [6].

Observe que o quiver  $\mathbb{1} = \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bullet \end{array}$  é o objeto final de **Quiv**. O quiver  $\Omega$  dado por



munido do morfismo  $\text{true} : \mathbb{1} \rightarrow \Omega$  que leva  $\bullet$  em 1 e o loop com base em  $\bullet$  em  $d$  é o classificador de subobjetos de **Quiv**, onde o morfismo classificante

$$S \hookrightarrow X \xrightarrow{\chi_S} \Omega$$



é dado por

$$\begin{aligned} \chi_S : V(Q) &\longrightarrow V(\Omega) \\ v &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{se } v \in V(S) \\ 0 & \text{se } v \notin V(S) \end{cases} \\ \\ \chi_S : A(Q) &\longrightarrow A(\Omega) \\ \alpha &\longmapsto \begin{cases} a & \text{se } s(\alpha), t(\alpha) \notin V(S) \\ b & \text{se } s(\alpha) \notin V(S) \text{ e } t(\alpha) \in V(S) \\ c & \text{se } s(\alpha) \in V(S) \text{ e } t(\alpha) \notin V(S) \\ d & \text{se } s(\alpha), t(\alpha) \in V(S) \text{ e } \alpha \in A(S) \\ e & \text{se } s(\alpha), t(\alpha) \in V(S) \text{ e } \alpha \notin A(S) \end{cases} \end{aligned}$$

Resta mostrar que **Quiv** tem todas as exponenciais e todos os limites finitos, o que é essencialmente consequência do próximo exemplo.

**Exemplo 2.2.10.** Dada uma categoria  $\mathcal{C}$ , a categoria **PSh**( $\mathcal{C}$ ) dos pré-feixes em  $\mathcal{C}$  é um topos. O classificador de subobjetos de **PSh**( $\mathcal{C}$ ) é dado pelo funtor  $\Omega : \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$  com

$$\Omega(X) = \{S : S \text{ é crivo sobre } X\}$$

$$f : X \longrightarrow Y \rightsquigarrow \Omega(f) = f^* : \Omega(Y) \longrightarrow \Omega(X)$$

Além disso, é um fato conhecido que **PSh**( $\mathcal{C}$ ) tem todos os limites finitos e exponenciais<sup>9</sup>. Observe em particular que

$$\mathbf{Quiv} \cong \mathbf{PSh} \left( \bullet \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \bullet \right)$$

Isso mostra que, de fato, **Quiv** é topos. Para mais detalhes sobre o exemplo de quivers, sugerimos [6].

**Exemplo 2.2.11.** Todo topos de Grothendieck é um topos elementar. De fato, é um fato geral de funtores que os limites em  $\mathcal{C} = \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$  são computados pontualmente. Além disso, os colimites de  $\mathcal{C}$  são dados pela feixificação dos colimites computados em **PSh**( $\mathcal{C}$ ) (que assim como limites, podem ser computados pontualmente). Em particular,  $\mathcal{C}$  possui todos os limites e colimites finitos (pois **Set** possui). Por fim, vamos apenas descrever o classificador de subobjetos e as exponenciais. A exponencial de dois feixes  $G$  e  $F$  é dado pelo seguinte funtor

$$G^F(C) = \text{Nat}(h_C \times F, G)$$

Para descrever o classificador de subobjetos precisamos fazer um breve desvio.

**Definição 2.2.10.** Dado um site  $(\mathcal{C}, J)$ , um crivo  $S$  sobre  $C \in \mathcal{C}$  é dito *fechado* se para todo morfismo  $f : D \longrightarrow C$  tal que  $f^*S \in J(D)$  temos que  $f \in S$ .

Não é muito difícil de se verificar que a propriedade de um crivo ser fechado é preservada por pullbacks, de tal maneira que temos um funtor  $\Omega \in \mathbf{PSh}(\mathcal{C})$

$$\Omega(C) = \{S \text{ crivo fechado sobre } C\}$$

Como sugerido pela notação,  $\Omega$  é de fato um feixe e faz o papel do classificador de subobjetos em **Sh**( $\mathcal{C}, J$ ) junto com o morfismo  $\mathbb{1} \longrightarrow \Omega$  dado em cada  $C \in \mathcal{C}$  por  $* \longmapsto t_C$ . Em particular, para **PSh**( $\mathcal{C}$ ) temos que

$$\Omega(C) = \{S \text{ crivo sobre } C\}$$

<sup>9</sup>Este ponto será melhor comentado no próximo exemplo.

### 3 Por que topos são um bom ambiente para a teoria dos conjuntos?

Como comentado anteriormente, intuitivamente um topos é uma categoria que *se comporta como Set*. Nessa seção, pretendemos deixar isto um pouco mais claro, embora novamente a maioria das tecnicidades serão deixadas de lado.

Em primeiro lugar, lembremos que **Set** é um topos. Mais ainda, um topos  $\mathcal{E}$  é *fechado por operações conjuntistas*, na medida de que...

- (i)  $\mathcal{E}$  é fechado por produtos finitos
- (ii)  $\mathcal{E}$  é fechado por coprodutos finitos. Lembremos que em  $\mathcal{E}$  o coproduto cumpre o mesmo papel que a união disjunta cumpre em **Set**
- (iii)  $\mathcal{E}$  é fechado por exponenciais
- (iv)  $\mathcal{E}$  é fechado pela interseção de subobjetos, onde a interseção de subobjetos  $A$  e  $B$  de um objeto  $X$  é definida por

$$A \cap B = \text{eq} \left( X \begin{array}{c} \chi_A \\ \rightrightarrows \\ \chi_B \end{array} \Omega \right)$$

A existência de tais construções induz generalizações dos axiomas de ZFC para o contexto de topos elementares. Por exemplo...

- (i) Como  $\mathcal{E}$  é cartesianamente fechada, existe um objeto final  $\mathbf{1}$ . Em particular, existe um objeto em  $\mathcal{E}$ . Isso pode ser entendido como um análogo do axioma *existe um conjunto* – que junto com o axioma da compreensão é equivalente ao axioma do vazio.
- (ii) A existência de todos os limites finitos implica na existência de todos os equalizadores. Isso, juntamente com a existência do classificador de subobjetos, pode ser entendido como uma formulação do axioma da compreensão – onde uma fórmula  $\varphi$  é representada por um morfismo  $\varphi : X \rightarrow \Omega$ ,  $! : X \rightarrow \mathbf{1}$  e a compreensão é dada pelo equalizador

$$\text{eq} \left( X \begin{array}{c} \text{true} \circ ! \\ \rightrightarrows \\ \varphi \end{array} \Omega \right) \leftrightarrow \{x \in X : \varphi(x)\}$$

Observe que essa construção é compatível com a construção usual do conjunto compreendido em ZFC, isto é, se

$$\begin{aligned} \varphi : X &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{se vale } \varphi(x) \\ 0 & \text{se não vale } \varphi(x) \end{cases} \end{aligned}$$

então

$$\{x \in X : \varphi(x)\} = \text{eq} \left( X \begin{array}{c} \text{true} \circ ! \\ \rightrightarrows \\ \varphi \end{array} \Omega \right)$$

em **Set**.

- (iii) A existência do classificador de subobjetos, juntamente com a existência das exponenciais, pode ser entendido como um análogo do axioma das partes – definindo-se

$$\mathcal{P}(X) = \Omega^X$$

Observe que em **Set** existe uma bijeção natural entre  $\mathcal{P}(X)$  e  $\{0, 1\}^X$  que leva  $S \subseteq X$  em

$$\begin{aligned} \chi_S : X &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x \in S \\ 0 & \text{se } x \notin S \end{cases} \end{aligned}$$

que são precisamente os morfismos classificantes dos subconjuntos de  $X$ . Ainda mais, as exponenciais em **Set** coincidem com os hom-sets. Isso mostra que essa construção é compatível com a noção usual do conjunto das partes em **Set** – a menos de isomorfismos, o que no caso de **Set** se traduz como a bijeção entre  $\mathcal{P}(X)$  e  $\{0, 1\}^X$ .

### 3.1 Nem tudo são flores...

Embora existam paralelos naturais entre os demais axiomas de ZFC e os axiomas de topos, nessa subseção mostraremos a partir de dois exemplos que tais axiomas não são satisfeitos em um topos qualquer.

**Exemplo 3.1.1.** Dizemos que um topos  $\mathcal{E}$  satisfaz ao axioma do infinito se  $\mathcal{E}$  admite um modelo de Peano. Mais precisamente, existe um objeto  $\mathbb{N}$  (dito um objeto de números naturais) e morfismos  $\mathbb{1} \xrightarrow{0} \mathbb{N} \xrightarrow{s} \mathbb{N}$  tais que para qualquer objeto  $X$  com morfismos  $\mathbb{1} \xrightarrow{x} X \xrightarrow{f} X$  existe um único morfismo  $h: \mathbb{N} \rightarrow X$  tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{1} & \xrightarrow{0} & \mathbb{N} & \xleftarrow{s} & \mathbb{N} \\ \downarrow \text{Id} & & \downarrow h & & \downarrow h \\ \mathbb{1} & \xrightarrow{x} & X & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

comuta. Observe que **FinSet** não admite modelo de Peano – dado que todo objeto de **FinSet** é um conjunto finito. Em outras palavras, nem todo topos satisfaz ao axioma do infinito.

Podemos enxergar o diagrama comutativo que  $\mathbb{N}$  satisfaz como um análogo ao Teorema da Recursão em um topos: nossa função iterativa é  $f$ , a escolha do elemento inicial é  $x$ , e a comutatividade do diagrama nos diz que aplicar  $f$  é o mesmo que ir para o passo  $n + 1$ .

**Exemplo 3.1.2.** Usando propriedades de adjunção, não é muito difícil de se verificar que dado um functor adjunto à esquerda, que preserve objeto final,  $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  entre dois topos, vale que se  $\mathcal{E}$  possui objeto  $\mathbb{N}$  de números naturais, então  $F\mathbb{N}$  é um objeto de números naturais em  $\mathcal{F}$ . Em particular, como temos funtores adjuntos à esquerda que preservam limites finitos (em particular objetos finais)

$$\mathbf{Set} \xrightarrow{\Delta} \mathbf{PSh}(\mathcal{E}) \xrightarrow{a} \mathbf{Sh}(\mathcal{E}, J)$$

segue que qualquer topos de Grothendieck possui um objeto de números naturais dado por  $\widehat{\mathbb{N}} := a\Delta\mathbb{N}$ .

**Exemplo 3.1.3.** Dizemos que um topos satisfaz ao axioma da escolha se todo epimorfismo admite seção, isto é, se dado um epimorfismo  $f: X \twoheadrightarrow Y$  existe  $g: Y \rightarrow X$  tal que

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \dashrightarrow \\ \xleftarrow{g} \end{array} Y$$

Observe em primeiro lugar que em **Set** tal condição é equivalente ao axioma da escolha – formulado da maneira usual. Considere agora os quivers

$$Q = \begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 2 \\ \uparrow & & \downarrow \\ 4 & \longleftarrow & 3 \end{array}$$

$$P = \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\quad} & \\ a & \xrightarrow{\quad} & b \\ & \xleftarrow{\quad} & \end{array}$$

Observe que existe um morfismo de quivers  $f: Q \rightarrow P$  que leva 1 e 3 em  $a$  e 2 e 4 em  $b$ . É também imediato que  $f$  é epimorfismo – pois os mapas  $f: V(Q) \rightarrow V(P)$  e  $f: A(Q) \rightarrow A(P)$  são ambos sobrejetores, o quê corresponde a um epimorfismo em  $\mathbf{PSh}(\bullet \rightrightarrows \bullet) \cong \mathbf{Quiv}$ . No entanto, observe que não existe morfismo  $P \rightarrow Q$ . Assim,  $f$  não admite sessão. Desse modo, **Quiv** não satisfaz ao axioma da escolha.

Esses exemplos ilustram o fato de que *nem tudo que vale em ZFC vale em um topos qualquer*. Ainda, é importante ressaltar que os demais axiomas de ZFC podem ser formulados no contexto de topos elementares através do que chamamos de *lógica interna* – conceito esse que, em particular, nos permite formular os axiomas da fundação e da substituição nesse novo contexto.

Infelizmente, não temos espaço nesse trabalho para tratar de tal conceito, que exige algum cuidado – embora alguma das questões centrais sobre esse tema já tenham sido abordadas aqui, como a ideia de representar fórmulas como morfismos  $X \rightarrow \Omega$ . Esperamos no entanto que essa seção sirva como uma *ilustração* desse conceito e de todo seu potencial.

## 4 O topos de Cohen

Nesta seção introduzimos o chamado *topos de Cohen*, que será fundamental para a aplicação do “forcing” para o caso da hipótese do contínuo. Iremos majoritariamente seguir [4]. Para começar, tomamos um conjunto  $B$  tal que  $|B| > 2^{\aleph_0}$  e definimos o seguinte poset.

$$\mathbb{P} = \{p: B \times \mathbb{N} \rightarrow 2 \mid p \text{ é parcial finita}\}$$

ordenado por  $p \leq q$  se e só se  $\text{dom } q \subseteq \text{dom } p$  e  $p|_{\text{dom } q} = q$ . Neste caso, diremos que  $p$  *estende*  $q$ . Mostraremos que em  $\mathbf{PSh}(\mathbb{P})$  existe um monomorfismo  $g: \Delta B \rightarrow \Omega^{\Delta \mathbb{N}}$ . De tal maneira que juntando com os monomorfismos vindos de  $\mathbf{Set}$  (pois  $\Delta$  preserva monomorfismos), teremos a seguinte sequência de morfismos

$$\Delta \mathbb{N} \hookrightarrow \Delta(2^{\mathbb{N}}) \hookrightarrow \Delta B \xrightarrow{g} \Omega^{\Delta \mathbb{N}}$$

Veremos ainda que  $g$  se fatora por  $\Omega_{\neg\neg}^{\Delta \mathbb{N}10}$ , ou seja, temos

$$\Delta \mathbb{N} \hookrightarrow \Delta(2^{\mathbb{N}}) \hookrightarrow \Delta B \xrightarrow{g} \Omega_{\neg\neg}^{\Delta \mathbb{N}}$$

que por sua vez, após aplicar o funtor de feixificação  $a$ , nos dará a seguinte sequência de monomorfismos ( $a$  preserva monomorfismos) em  $\mathbf{Sh}(\mathbb{P})$ .

$$\widehat{\mathbb{N}} \hookrightarrow \widehat{2^{\mathbb{N}}} \hookrightarrow \widehat{B} \xrightarrow{ag} a(\Omega^{\Delta \mathbb{N}})$$

Onde  $\widehat{\cdot} = a\Delta$ . Veremos também que  $a(\Omega^{\Delta \mathbb{N}}) \cong \Omega_{\neg\neg}^{\widehat{\mathbb{N}}}$ , de tal maneira que se provarmos que estes monomorfismos são “estritos” (em um sentido a ficar claro na próxima seção), teremos de fato forçado a existência de objetos estritamente entre os naturais (nesse caso  $\widehat{\mathbb{N}}$ ) e seu “conjunto das partes” ( $\Omega_{\neg\neg}^{\widehat{\mathbb{N}}}$ ). Antes de prosseguirmos, vamos fazer algumas observações.

**Observação 3.** Na topologia double negation, temos que um crivo  $S$  sobre  $p$  é fechado se e só se

$$q \leq p \text{ e } S \cap q \downarrow \text{ é denso em } q \downarrow \implies q \in S$$

**Observação 4.** Como  $h_p(q) = \emptyset$  se  $q \not\leq p$  e  $h_p(q) = *$  se  $q \leq p$ , podemos descrever a exponencial de dois (pré)feixes  $F$  e  $G$  apenas por

$$G^F(p) = \text{Nat}(F|_{p \downarrow}, G|_{p \downarrow})$$

Vamos agora construir o monomorfismo  $g: \Delta B \rightarrow \Omega^{\Delta \mathbb{N}}$ . Para isto, temos que construir funções  $g_p: B \rightarrow \Omega^{\Delta \mathbb{N}}(p)$  para todo  $p \in \mathbb{P}$  de tal maneira que  $g$  seja natural. Agora, para definir  $g_p$ , temos que dar uma transformação natural  $g_p(b): \Delta \mathbb{N}|_{p \downarrow} \rightarrow \Omega|_{p \downarrow}$  para cada  $b \in B$ . Defina então

$$g_p(b)_q: \mathbb{N} \rightarrow \{\text{crivos sobre } q\}$$

por

$$g_p(b)_q(n) = \{r \in \mathbb{P} \mid r \leq q \text{ e } r(b, n) = 0\}$$

Vamos verificar que  $g_p(b)_q(n)$  é um crivo. De fato, se  $r \in g_p(b)_q(n)$  e  $r' \leq r$ , temos pela definição de  $\leq$  que  $r'(b, n) = r(b, n) = 0$ . Não é muito difícil de se verificar que isto de fato define o morfismo  $g$ . Vamos agora verificar que  $g$  é monomorfismo.

<sup>10</sup>Aqui usamos  $\Omega$  para o classificador de subobjetos de  $\mathbf{PSh}(\mathcal{C})$  e  $\Omega_{\neg\neg}$  para o classificador de subobjetos em  $\mathbf{Sh}(\mathcal{C})$ .

**Proposição 4.0.1.**  *$g$  como definido acima é um monomorfismo.*

*Demonstração.* Para isto, basta provarmos que cada  $g_p$  é um monomorfismo. Ou seja, se  $b \neq c \in B$ , então existe  $q \leq p$  e  $n \in \mathbb{N}$  tais que  $g_p(b)_q(n) \neq g_p(c)_q(n)$ . Tome  $q = p$ , como o domínio de  $p$  é finito, podemos tomar  $n \gg 0$  de tal maneira que  $(b, n), (c, n) \notin \text{dom } p$ . Podemos então definir  $r \leq p$  colocando  $r(b, n) = 0$  e  $r(c, n) = 1$ . Então  $r \in g_p(b)_p(n)$  mas  $r \notin g_p(c)_p(n)$ . ■

Encontramos então nosso monomorfismo  $g$ . O próximo passo é verificar que  $g$  se fatora por  $\Omega_{\neg \rightarrow}^{\Delta \mathbb{N}}$ . Para isto, basta verificar que cada  $g_p(b)$  se fatora por  $\Omega_{\neg \rightarrow}$ . Ou seja, temos que provar que

**Proposição 4.0.2.** *Para cada  $q \leq p \in \mathbb{P}$ ,  $b \in B$  e  $n \in \mathbb{N}$  temos que  $g_p(b)_q(n)$  é fechado.*

*Demonstração.* Lembre-se que  $g_p(b)_q(n)$  é fechado se e só se

$$q' \leq q \text{ e } g_p(b)_q(n) \cap q' \downarrow \text{ é denso em } q' \downarrow \implies q' \in g_p(b)_q(n).$$

ou seja,

$$q' \leq q \text{ e } \forall r \leq q' \exists r' \in g_p(b)_q(n) \text{ tal que } r' \leq r \implies q'(b, n) = 0$$

Mas isto é claro, já que se  $q'$  satisfaz as condição da esquerda, então tomando em particular  $r = q'$ , existe  $r' \in g_p(b)_q(n)$  tal que  $r' \leq q$ . Ou seja,  $q(b, n) = r'(b, n) = 0$ . Provamos então que cada  $g_p(b)_q(n)$  é fechado. ■

Logo  $g$  se fatora por  $\Omega_{\neg \rightarrow}^{\Delta \mathbb{N}}$ , como queríamos. Vamos agora provar uma última proposição.

**Proposição 4.0.3.** *Em  $\mathbf{Sh}(\mathbb{P})$  temos que  $a(\Omega_{\neg \rightarrow}^{\Delta \mathbb{N}}) \cong \Omega_{\neg \rightarrow}^{\widehat{\mathbb{N}}}$ .*

*Demonstração.* Perceba que para qualquer  $F \in \mathbf{PSh}(\mathbb{P})$  temos por propriedades de adjunção que

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathbb{P})}(F, \Omega_{\neg \rightarrow}^{\Delta \mathbb{N}}) &\cong \text{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathbb{P})}(F \times \Delta \mathbb{N}, \Omega_{\neg \rightarrow}) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathbf{Sh}(\mathbb{P})}(a(F \times \Delta \mathbb{N}), \Omega_{\neg \rightarrow}) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathbf{Sh}(\mathbb{P})}(a(F) \times a(\Delta \mathbb{N}), \Omega_{\neg \rightarrow}) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathbf{Sh}(\mathbb{P})}(a(F), \Omega_{\neg \rightarrow}^{\widehat{\mathbb{N}}}) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathbb{P})}(F, \Omega_{\neg \rightarrow}^{\widehat{\mathbb{N}}}) \end{aligned}$$

Por Yoneda concluímos então que  $\Omega_{\neg \rightarrow}^{\Delta \mathbb{N}} \cong \Omega_{\neg \rightarrow}^{\widehat{\mathbb{N}}}$  e portanto,  $a(\Omega_{\neg \rightarrow}^{\Delta \mathbb{N}}) \cong \Omega_{\neg \rightarrow}^{\widehat{\mathbb{N}}}$ . ■

Desta maneira, mostramos que em  $\mathbf{Sh}(\mathbb{P})$  temos a sequência

$$\widehat{\mathbb{N}} \hookrightarrow \widehat{2^{\mathbb{N}}} \hookrightarrow \widehat{B} \xrightarrow{ag} \Omega_{\neg \rightarrow}^{\widehat{\mathbb{N}}}$$

como queríamos. Porém, perceba que a sequência

$$\Delta \mathbb{N} \hookrightarrow \Delta(2^{\mathbb{N}}) \hookrightarrow \Delta B \xrightarrow{g} \Omega^{\Delta \mathbb{N}}$$

válida em  $\mathbf{PSh}(\mathbb{P})$  nos indica que na passagem de  $\mathbf{Set}$  para  $\mathbf{PSh}(\mathbb{P})$  o processo de forcing já aconteceu com o acréscimo do monomorfismo  $g$ . Poderia então ser que a hipótese do contínuo já não fosse válida em  $\mathbf{PSh}(\mathbb{P})$ , porém este não será o caso (ao menos não provaremos isto), por diversas razões discutidas no início da próxima seção, veremos que é vantajoso passar para  $\mathbf{Sh}(\mathbb{P})$ .

Note que diferentemente do forcing de Cohen, não foi necessária a utilização de toda a teoria envolvendo conjuntos densos e filtros genéricos para a adição de um novo objeto ao nosso modelo. Na realidade, o uso de filtros no método clássico se dá para garantir a compatibilidade das aproximações que estão sendo tomadas, para que ao fim possam ser “coladas” de modo a obter o objeto desejado. No caso de topos, a condição de compatibilidade dos crivos já é capturada pela própria naturalidade de  $g$  e  $g_p(b)$ .

**Observação 5.** Todo topos possui linguagem e lógica interna, porém esta longe de ser verdade que todo topos (mesmo de Grothendieck) é um modelo de ZFC. Em geral, a lógica de um topos é intuicionista, porém existem topos onde vale a lei do terceiro excluído, chamados de topos booleanos. Mas ainda, dado um topos  $\mathcal{E}$  qualquer, existe um “menor” topos booleano  $\mathcal{E}_{\neg, \neg}$  associado a ele. Infelizmente esta construção esta longe do escopo deste texto, então nos contentamos em comentar que para  $\mathcal{E} = \mathbf{PSh}(\mathbb{P})$  temos que  $\mathcal{E}_{\neg, \neg} = \mathbf{Sh}(\mathbb{P})$ . Vale a pena comentar também que uma propriedade que será importante para nós no futuro é a de que em um topos booleano todo subobjeto possui complementar. Mais precisamente, dado um objeto  $Y \in \mathcal{E}$ , com  $\mathcal{E}$  um topos booleano, e um subobjeto  $Z \hookrightarrow Y$ , existe um subobjeto  $\neg Z \hookrightarrow Y$  de  $Y$  tal que  $Y \cong Z + (\neg Z)$  (coproduto). Além disso, vale em geral que para qualquer poset  $\mathbb{P}$ , o topos de feixes de double negation em  $\mathbb{P}$  satisfaz o axioma da escolha! Desta maneira, o resultado alcançado ao fim deste texto será

**Proposição 4.0.4.** *Existe um topos booleano satisfazendo o axioma da escolha onde não vale a hipótese do contínuo.*

## 5 Preservação de Monomorfismos

Como comentado na seção anterior, o forcing já ocorreu na passagem de **Set** para  $\mathbf{PSh}(\mathbb{P})$ , com o acréscimo do mapa  $g$ . As razões por trás da necessidade de descermos ao subtopos  $\mathbf{Sh}(\mathbb{P})$  são duas:

- (i) Nosso objetivo final é obter um topos que seja congruente com o que esperamos de uma teoria dos conjuntos que modele ZFC, no sentido discutido anteriormente. Para isso, tomamos feixes com respeito à topologia double negation em  $\mathbb{P}$  para formar um topos booleano onde vale Escolha.
- (ii) É apenas em  $\mathbf{Sh}(\mathbb{P})$  que conseguimos garantir que as desigualdades encontradas anteriormente são estritas. Intuitivamente, fomos muito permissivos quanto aos objetos adicionados em  $\mathbf{PSh}(\mathbb{P})$ , e vamos retirar possíveis sobrejeções indesejadas.

Mas em primeiro lugar, o que queremos dizer com “desigualdades estritas”?

Em teoria dos conjuntos clássica, é óbvio como fazer sentido formal dessa ideia:

**Definição 5.0.1.** Dados  $X$  e  $Y$  conjuntos, dizemos que  $X < Y$  se existe uma injeção  $m : X \hookrightarrow Y$  e se  $\text{Epi}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y\}$  é vazio.

Substituindo injeções por monomorfismos, e sobrejeções por epimorfismos, obtemos um análogo natural para topoi quaisquer: dizemos que  $X < Y$  se existe mono de  $X$  em  $Y$  mas não existe epi de  $X$  em  $Y$ .

Todavia, note que algo um pouco diferente ocorre em **Set**. Existe um objeto  $\text{Epi}(X, Y) \in \mathbf{Set}$  que classifica epimorfismos  $X \rightarrow Y$ , de modo que verificar que  $\text{Epi}(X, Y) \cong 0$  (o que de modo geral é bem mais plausível) é o mesmo que garantir que não existem epimorfismos de  $X$  em  $Y$ .

Nosso objetivo é construir tal objeto  $\text{Epi}(X, Y)$  para um topos elementar  $\mathcal{E}$  qualquer.

### 5.1 A construção de $\text{Epi}(X, Y)$

Sejam  $X$  e  $Y$  objetos de  $\mathcal{E}$ . A construção de  $\text{Epi}(X, Y)$  será feita ao longo de três passos:

- Passo 1: Utilizando-se de objetos auxiliares  $E$  de  $\mathcal{E}$ , construiremos mapas

$$\text{im}_E: \text{Hom}(E, Y^X) \longrightarrow \text{Hom}(E, \Omega^Y)$$

- Passo 2: Verifica-se a naturalidade de  $\text{im}_E$  em  $E$ , e pelo Lema de Yoneda, garantimos que tais mapas são dados via composição com um mapa

$$\text{im}: Y^X \longrightarrow \Omega^Y$$

- Passo 3: Por fim, definimos  $\text{Epi}(X, Y)$  como o pullback do diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Epi}(X, Y) & \longrightarrow & \mathbb{1} \\ \downarrow & & \downarrow \text{true}_Y \\ Y^X & \xrightarrow{\text{im}} & \Omega^Y \end{array}$$

Onde  $\text{true}_Y$  é o mapa induzido por  $\mathbb{1} \times Y \rightarrow \mathbb{1} \xrightarrow{\text{true}} \Omega$ .

Com efeito, sejam  $E$  um objeto de  $\mathcal{E}$  e  $f : E \rightarrow Y^X$ . Passando  $f$  do exponencial para o produto, obtemos  $\hat{f} : E \times X \rightarrow Y$ . Considere o mapa  $(\pi_1, \hat{f}) : E \times X \rightarrow E \times Y$ , cuja primeira coordenada é a projeção em  $E$ . Para dizer o que será  $\text{im}_E(f)$ , nos utilizaremos do lema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [4].

**Lema 5.1.1.** *Em um topos, toda flecha  $f$  pode ser fatorada como  $f = mp$ , onde  $p$  é um epimorfismo e  $m$  é um monomorfismo. Mais ainda, existe um menor subobjeto  $\hat{m}$  de  $\text{codom}(f)$  com tal propriedade, dito a imagem de  $f$ .*

Note que o Lema acima não nos é estranho: em **Set**, conseguimos fatorar qualquer função  $f : X \rightarrow Y$  como  $f : X \rightarrow \text{im}(f)$  e a inclusão  $i : \text{im}(f) \hookrightarrow Y$ .

Seja então  $\hat{m}_f \hookrightarrow E \times Y$  a imagem do mapa  $(\pi_1, \hat{f})$ . Como  $\hat{m}_f$  é subobjeto de  $E \times Y$ , seja  $\text{im}_E(f) : E \rightarrow \Omega^Y$  a transposta do mapa característico de  $\hat{m}_f$ .

**Lema 5.1.2.** *O mapa construído acima é funtorial em  $E$ .*

*Demonstração.* Sejam  $E$  e  $D$  objetos de  $\mathcal{E}$  e  $\alpha : D \rightarrow E$ . Queremos que para cada  $f : E \rightarrow Y^X$  valha  $\text{im}_D(f \circ \alpha) = \text{im}_E(f) \circ \alpha$ . Considere  $\hat{f}\alpha = \hat{f}(\alpha \times 1) : D \times X \rightarrow Y$ . Note primeiramente que o diagrama abaixo é um pullback:

$$\begin{array}{ccc} D \times X & \xrightarrow{\alpha \times X} & E \times X \\ (\pi_1, \hat{f}\alpha) \downarrow & & \downarrow (\pi_1, \hat{f}) \\ D \times Y & \xrightarrow{\alpha \times Y} & E \times Y \end{array}$$

Como a fatoração de flechas em  $\text{mono} \circ \text{epi}$  é preservada por pullbacks, vale que  $\text{Im}_{E'}(f\alpha)$  é o pullback de  $\text{Im}_E(f)$  por  $\alpha \times Y$ . O resto da demonstração decorre do diagrama abaixo, dado pelo pullback de  $\alpha \times Y$ , onde  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(A)$  denota os subobjetos de  $A$ .

$$\begin{array}{ccccc} \text{Sub}_{\mathcal{E}}(E \times Y) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}(E \times Y, \Omega) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}(E, \Omega^Y) \\ \downarrow (\alpha \times Y)^* & & \downarrow (\alpha \times Y)^* & & \downarrow \alpha^* \\ \text{Sub}_{\mathcal{E}}(D \times Y) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}(D \times Y, \Omega) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}(D, \Omega^Y) \end{array}$$

■

Segue de Yoneda que *para todo*  $E$  em  $\mathcal{E}$ , o mapa

$$\text{im}_E : \text{Hom}(E, Y^X) \rightarrow \text{Hom}(E, \Omega^Y)$$

é dado via composição com um mapa  $\text{im} : Y^X \rightarrow \Omega^Y$ , que não depende mais de  $E$ .

O leitor mais cético talvez esteja se questionando qual a necessidade real de uma construção tão intrincada, e se seria possível construir um mapa imagem diretamente. Em um topos onde  $Y^X$  é dado de fato pelos morfismos de  $X$  em  $Y$  (como é o caso de **Set**), poderíamos construir um mapa imagem do seguinte modo: dada uma função  $f : X \rightarrow Y$ , à associamos ao mapa característico de  $\text{im}(f)$ , que é morfismo de  $\Omega$  em  $Y$ .

O problema dessa construção é sua falta de generalidade, já que  $\Omega$  e objetos exponenciais são dados axiomaticamente, de modo que não necessariamente  $Y^X$  corresponde ao conjunto dos morfismos de  $X$  em  $Y$ .<sup>11</sup>

Na realidade, a construção que realizamos via “objetos auxiliares” é uma comumente encontrada no contexto de topos e teoria das categorias, mostrando o papel central que o Lema de Yoneda possui para demonstrações em um contexto tão abstrato como esse.

Por fim, como dito anteriormente, definimos  $\text{Epi}(X, Y)$  como o pullback do diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc} \text{Epi}(X, Y) & \longrightarrow & \mathbb{1} \\ \downarrow & & \downarrow \text{true}_Y \\ Y^X & \xrightarrow{\text{im}} & \Omega^Y \end{array}$$

onde  $\text{true}^Y$  é a transposta de  $1 \times Y \rightarrow 1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega$ .

A intuição por trás dessa construção é a que ao tomar o pullback dos morfismos  $\text{Im}$  e  $\text{true}^Y$ , estamos igualando-os, e então olhando justamente para os morfismos de  $X$  em  $Y$  que tem imagem cheia em  $Y$ , isto é, que batem com  $\text{true}^Y$  em  $\Omega^Y$ .

Para que possamos provar as propriedades desejadas de  $\text{Epi}(X, Y)$ , faremos uso do seguinte lema, cuja demonstração pode ser novamente encontrada em [4].

**Lema 5.1.3.** *Dado  $E$  objeto de  $\mathcal{E}$ , um morfismo  $f : E \rightarrow Y^X$  fatora por  $\text{Epi}(X, Y) \hookrightarrow Y^X$  se e somente se  $(\pi_1, \widehat{f}) : E \times X \rightarrow E \times Y$  é epimorfismo em  $\mathcal{E}$ .*

Em outras palavras, nosso objeto  $\text{Epi}(X, Y)$  classifica epimorfismos parametrizados como na definição de  $\text{im}_E$ . Em particular, temos:

**Corolário 5.1.1.** *Um topos é dito não degenerado se  $1 \not\cong 0$ . Se  $\mathcal{E}$  é um topos não degenerado então  $\text{Epi}(X, Y) \cong 0$  implica que não existem epimorfismos  $X \rightarrow Y$ .*

*Demonstração.* Suponha por absurdo que  $\text{Epi}(X, Y) \cong 0$  e que exista um epimorfismo  $g : X \rightarrow Y$ . Como  $X \cong X \times 1$ , passando para o exponencial obtemos  $\widehat{g} : 1 \rightarrow Y^X$ . Aplicando o lema anterior com  $E = 1$ , conseguimos um mapa  $1 \rightarrow \text{Epi}(X, Y) \cong 0$ . Mas toda flecha apontando para o objeto inicial em um topos é isomorfismo, e portanto  $1 \cong 0$ , uma contradição. ■

Já recuperamos quase toda força que  $\text{Epi}(X, Y)$  possuía em **Set**, mas resta analisar sua relação com epimorfismos e monomorfismos.

**Corolário 5.1.2.** *Seja  $p : Y \rightarrow Z$  um epimorfismo. Então o mapa  $p^X : Y^X \rightarrow Z^X$  restringe a um mapa “entre epimorfismos”,  $p^X : \text{Epi}(X, Y) \rightarrow \text{Epi}(X, Z)$ .*

*Demonstração.* Em vista da equivalência do Lema 5.1.3, para mostrar que  $p^X$  fatora por  $\text{Epi}$  basta ver que para toda flecha  $f : E \rightarrow Y^X$ , se  $(\pi_1, \widehat{f}) : E \times X \rightarrow E \times Y$  é epimorfismo, então  $(\pi_1, \widehat{(p^X \circ f)}) : E \times X \rightarrow E \times Z$  também o é.

Para tal, note que  $(\pi_1, \widehat{(p^X \circ f)}) = (\text{id}_E \times p) \circ (\pi_1, \widehat{f})$ . Mas então  $\text{id}_E \times p$  é epimorfismo, pois  $p$  é por hipótese. ■

**Lema 5.1.4.** *Seja  $\mathcal{E}$  um topos booleano,  $X$  um objeto de  $\mathcal{E}$  e  $m : Z \rightarrow Y$  monomorfismo. Suponha que exista  $z : 1 \rightarrow Z$ . Então  $\text{Epi}(X, Z) \cong 0$  implica que  $\text{Epi}(X, Y) \cong 0$ .*

*Demonstração.* Como  $\mathcal{E}$  é booleano, podemos escrever  $Y$  como  $Y = Z + (\neg Z)$ , onde  $\neg Z$  é o complemento de  $Z$  na álgebra booleana (por hipótese) dos subobjetos de  $Y$ . Note que  $Y$  é o coproduto de  $Z$  e  $\neg Z$ . Considere os mapas  $\text{id}_Z : Z \rightarrow Z$  e  $\neg Z \rightarrow 1 \xrightarrow{z} Z$ . Juntando as flechas no coproduto,

<sup>11</sup>Infelizmente, nem mesmo em Topoi de Grothendieck esse é o caso.



temos  $r : Y \rightarrow Z$ , e por construção  $r \circ m = \text{id}_Z$ . Então  $r$  possui inversa à direita, e portanto é epimorfismo.

Pelo corolário anterior,  $r$  induz um mapa  $\text{Epi}(X, Y) \rightarrow \text{Epi}(X, Z)$ . Se  $\text{Epi}(X, Z) \cong 0$ , então como toda flecha apontando para o objeto inicial de um topos é um isomorfismo, temos  $\text{Epi}(X, Y) \cong 0$ . ■

Em suma, se não há epimorfismos  $X \rightarrow Y$ , não podem haver epis de  $X$  em objetos menores que  $Y$ . Note que usamos fortemente a hipótese de que  $\mathcal{E}$  é booleano para que pudéssemos completar um subobjeto até o objeto inteiro.

## 5.2 $\mathbf{Sh}(\mathbb{P})$ não adiciona epimorfismos

Com o que foi feito até agora estamos quase prontos para a prova de que em  $\mathbf{Sh}(\mathbb{P})$  não vale a Hipótese do Continuum. Resta verificar que no Topos de Cohen não colapsamos cardinais, isto é, não adicionamos epimorfismos, no seguinte sentido:

Se  $X$  e  $Y$  são conjuntos, então  $\text{Epi}(X, Y) = 0$  implica que  $\text{Epi}(\widehat{X}, \widehat{Y}) \cong 0$ .

Note que se a condição acima se verifica, de fato concluímos a prova: após aplicar a feixificação **a** na cadeia de inclusões obtida em  $\mathbf{PSh}(\mathbb{P})$ , temos

$$\widehat{N} \hookrightarrow \widehat{2^N} \hookrightarrow \widehat{B} \xrightarrow{\text{ag}} \Omega_{\neg, \neg}^{\widehat{N}}$$

em  $\mathbf{Sh}(\mathbb{P})$ , onde  $\text{Epi}(N, 2^N)$  e  $\text{Epi}(2^N, B)$  são vazios em  $\mathbf{Set}$ , já que o cardinal  $B$  fixado é estritamente maior que  $2^N$ .

Pela hipótese sobre Epi temos  $\text{Epi}(\widehat{N}, \widehat{2^N})$ ,  $\text{Epi}(\widehat{2^N}, \widehat{B}) \cong 0$ , e portanto

$$\widehat{N} < \widehat{2^N} < \widehat{B}.$$

Como  $B$  é conjunto, temos um mapa  $b : 1 \rightarrow B$  em  $\mathbf{Set}$ , e portanto temos um mapa  $\widehat{b} : 1 \rightarrow \widehat{B}$ , já que  $\widehat{\phantom{x}}$  preserva limites. Isto é, estamos nas hipóteses do Lema 5.1.4, com  $Z = \widehat{B}$  e  $Y = \Omega_{\neg, \neg}^{\widehat{N}}$ .

Logo  $\text{Epi}(2^N, \Omega_{\neg, \neg}^{\widehat{N}}) \cong 0$ , garantindo as desigualdades estritas

$$\widehat{N} < \widehat{2^N} < \Omega_{\neg, \neg}^{\widehat{N}}$$

e assim concluindo a demonstração.

**Observação 6.** A demonstração da negação da Hipótese do Continuum no Topos de Cohen que acabamos de verificar difere crucialmente da prova original de Cohen em alguns pontos.

Aqui utilizamos  $\widehat{B}$  como um objeto auxiliar para garantir a desigualdade estrita  $2^N < \Omega_{\neg, \neg}^{\widehat{N}}$ , sem necessariamente mostrar que o objeto  $\widehat{B}$  adicionado é de fato  $\Omega_{\neg, \neg}^{\widehat{N}}$ . Isto é, não verificamos que **ag** é isomorfismo, e nem exibimos algum outro isomorfismo entre os mesmos. Em sua demonstração original, Cohen se utiliza de argumentos de contagem, juntamente com uma condição sobre anticaideias de  $\mathbb{P}$  (que será discutida posteriormente), e da construção de um conjunto esperto de nomes<sup>12</sup> em  $V^{\mathbb{P}}$  para garantir que  $\widehat{B}$  é de fato uma cota superior para  $\mathfrak{c}$  no modelo forçado  $V[G]$ .

Note que o método em topos, bem como o método de Cohen, é capaz de mostrar que  $\mathfrak{c} = \Omega_{\neg, \neg}^{\widehat{N}}$  é “arbitrariamente grande”, pois poderíamos tomar  $\kappa$  um cardinal não enumerável qualquer,  $B = \kappa^+$ , e de modo completamente análogo ao discutido, teríamos

$$\widehat{N} < \widehat{\kappa} < \Omega_{\neg, \neg}^{\widehat{N}}$$

Todavia, apenas com os argumentos apresentados aqui não é possível assegurar o valor exato de  $\Omega_{\neg, \neg}^{\widehat{N}}$  em  $\mathbf{Sh}(\mathbb{P})$ , ao contrário do método clássico, onde verifica-se que é consistente com ZFC que  $\mathfrak{c}$  seja qualquer cardinal de cofinalidade não enumerável.

<sup>12</sup>que possuem o sugestivo nome de *nice names*

Finalmente, no forcing clássico, o modelo estendido com a adição do filtro genérico  $G$  já é o modelo desejado, enquanto em topos o forcing é realizado em duas etapas: primeiramente adicionamos o morfismo  $g$ , e depois tomamos um subtopos adequado. Nesse ponto não há uma tradução para o método de Cohen, já que é possível demonstrar que  $V[G]$  é o menor modelo de ZFC contendo  $G$ . Todavia há uma analogia com métodos de forcing que visam encontrar modelos de ZF inconsistentes com o Axioma da Escolha. Nesses casos, o modelo encontrado é um submodelo de  $V[G]$  construído via automorfismos do poset  $\mathbb{P}$ .

Para concretizarmos a demonstração, ainda resta verificar que  $\mathbf{Sh}(\mathbb{P})$  satisfaz a condição de não adição de epimorfismos discutida anteriormente. Para isso introduzimos a seguinte definição:

**Definição 5.2.1.** Dizemos que um poset  $\mathbb{Q}$  satisfaz a *countable chain condition* (ccc) se toda anticadeia em  $\mathbb{Q}$  é no máximo enumerável.

Lembrando que uma anticadeia  $A$  em  $\mathbb{Q}$  é um conjunto de elementos dois a dois incompatíveis, isto é, para todos  $p, q \in A$ , não existe  $r \in \mathbb{Q}$  tal que  $r \leq p, q$ .

Como no forcing clássico, a condição necessária para que cardinais não sejam colapsados na extensão é justamente que o forcing poset utilizado satisfaça a *countable chain condition*.

**Lema 5.2.1.** Se  $\mathbb{Q}$  satisfaz a ccc, então  $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(\mathbb{Q})$  não adiciona epimorfismos.

Finalmente, como o cardinal  $B$  fixado possui cofinalidade não-enumerável, é possível demonstrar que nosso forcing poset  $\mathbb{P} = \{p: B \times \mathbb{N} \rightarrow 2 \mid p \text{ é parcial finita}\}$  satisfaz a ccc. A demonstração se utiliza fortemente de  $\text{cf}(B) > \omega$  para a aplicação de um resultado de combinatória infinita conhecido como *Delta System Lemma*, e pode ser vista em detalhes em [2].

O lema acima revela que, ainda que hajam distinções agudas entre os métodos de forcing conjuntista e categórico, a essência do forcing ainda recorre à argumentos e condições combinatórias sobre o poset de aproximações para a garantia do controle e bom comportamento do modelo estendido.

## Referências

- [1] Daniel Gratzer. *On the Independence of the Continuum Hypothesis*. Notas sobre o tema escritas por Daniel Gratzer. Disponível em <https://josefg.github.io/papers/on-the-independence.pdf>.
- [2] Kenneth Kunen. *Set theory*. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations 34. College Publications, 2013.
- [3] C. McLarty. *Elementary Categories, Elementary Toposes*. Oxford Logic Guides 21. Oxford University Press, 1992.
- [4] Ieke Moerdijk Saunders MacLane. *Sheaves in geometry and logic: a first introduction to topos theory*. Universitext. Springer, 1994.
- [5] A. Tenório. “Álgebra Homológica em Topos”. Em: *Dissertação de Mestrado IME-USP* (2019).
- [6] S. Vigna. “A Guided Tour in the Topos of Graphs”. Em: *arXiv: Category Theory* (2003).