

O TEOREMA DE SINGULARIDADE DE HAWKING

Gabriela Cristina da Silva

Dezembro de 2022

Sumário

1	Introdução	2
2	Breve revisão de Geometria Lorentziana	2
2.1	Condições de causalidade	6
2.2	Condição de energia forte	7
3	Resultados utilizados na demonstração dos teoremas de Hawking	8
4	O Teorema de singularidade de Hawking	9
5	Exemplos	9
5.1	Solução de Schwarzschild	9
5.2	Modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)	11
6	Conclusão	12

1 Introdução

Nas mídias de comunicação, exemplos de singularidades, tais como os buracos negros e o Big Bang são facilmente encontrados. Mas afinal, o que é uma singularidade? De modo intuitivo, faz sentido definir uma singularidade em um espaço-tempo como um ponto da variedade associada no qual a métrica Lorentziana não está definida ou não é diferenciável. No entanto, se definirmos o conceito de singularidade dessa forma, teremos alguns inconvenientes, uma vez que:

- uma métrica Lorentziana está definida em todo o espaço-tempo; e
- a definição também nos diz que ela é diferenciável em todo ponto da variedade.

Com isso, suponhamos que removemos os pontos aonde a métrica não é diferenciável ou aonde "coisas estranhas acontecem". Uma definição razoável é dizer que existe uma geodésica no espaço-tempo cujo domínio de definição não pode ser estendido para toda reta. No entanto, observe que existem três tipos de geodésicas: tipo espaço, tempo e luz. Portanto, ao longo das seções iremos definir precisamente esse conceito.

O objetivo desse trabalho é apresentar de forma clara uma demonstração do teorema de singularidade de Hawking que garante a existência de uma singularidade no passado (ou, em outras palavras, que garante que certas geodésicas tipo tempo inextensíveis e que apontam para o futuro são incompletas pela esquerda). Para provar esse teorema, precisamos de três resultados fundamentais:

- o Teorema de Avez-Seifert (teorema 3.3), que fornece condições suficientes para garantir que, dentre todas as curvas do tipo tempo ligando p a S (hipersuperfície de Cauchy), existirá uma curva tipo tempo que maximiza a distância, a qual será uma geodésica do tipo tempo ortogonal a S ;
- a proposição 3.1 (que será apresentada na seção 3), que nos dá condições suficientes para garantir a existência de pelo menos um ponto focal de uma determinada geodésica, sob certas hipóteses; e,
- por fim, a proposição 3.2 (apresentada também na seção 3), que nos dá condições suficientes para que uma determinada geodésica do tipo tempo maximize o comprimento.

Por último, apresentaremos algumas aplicações a determinados modelos físicos que possuem singularidades para além das quais as geodésicas do tipo tempo não estão definidas para todo instante de tempo (a solução de Schwarzschild e o modelo cosmológico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walter).

Nesse trabalho, foi utilizado o livro "*An Introduction to Mathematical Relativity*", do autor José Natário, como referência principal, e [2], [3], [4] e [5] como referências complementares.

Agradecimentos: agradeço ao professor Cristian Ortiz pela disciplina ministrada, que foi muito proveitosa e diferenciada, tendo, com certeza, contribuído para a minha formação; agradeço também, ao monitor da disciplina, o Fabrício, por sempre estar disponível para tirar dúvidas. Também, agradeço aos colegas de classe pelas discussões ao longo da disciplina. Por fim, agradeço meu orientador, o prof Paolo, pela revisão do trabalho. Obrigada!

2 Breve revisão de Geometria Lorentziana

Nesta seção iremos revisar alguns conceitos da geometria Lorentziana que serão importantes para a compreensão do teorema de singularidade de Hawking.

Vamos recordar que um campo tensorial do tipo $(0,2)$ simétrico g , associa a cada ponto p , de uma variedade diferenciável M , uma forma bilinear simétrica $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. Neste contexto:

DEFINIÇÃO 2.1 (CAMPO TENSORIAL NÃO-DEGENERADO). Dizemos que g é **não-degenerado** se para todo $p \in M$ e todo $v \in T_p M$ vale que se $g_p(v, w) = 0$ qualquer que seja $w \in T_p M$ então $v = 0$.

DEFINIÇÃO 2.2 (ÍNDICE DE UM CAMPO TENSORIAL). Dizemos que η_p é o **índice** de g , se o índice η_p da forma quadrática g_p for o mesmo para todo $p \in M$, .

DEFINIÇÃO 2.3 (TENSOR MÉTRICO). Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n . Um **tensor métrico** (ou métrica) g em M é um campo tensorial do tipo $(0, 2)$ que é suave, simétrico, não degenerado e de índice constante η .

DEFINIÇÃO 2.4 (ESPAÇO PSEUDO-EUCLIDIANO). O **espaço pseudo-euclidiano** de índice η , denotado por \mathbb{R}_η^n é o espaço vetorial \mathbb{R}^n com a soma usual e a multiplicação por escalar equipado com o produto interno definido da seguinte forma:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\eta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle x, y \rangle_\eta := x_1 y_1 + \dots + x_{n-\nu} y_{n-\nu} - x_{n-\nu+1} y_{n-\nu+1} - \dots - x_n y_n.$$

com $n \geq 2$, em que $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$. Resumindo, $\mathbb{R}_\eta^n := (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_\eta)$.

DEFINIÇÃO 2.5 (VARIEDADE PSEUDO-RIEMANNIANA). Uma **variedade pseudo-Riemanniana** de dimensão n é um par (M, g) , em que M é uma variedade diferenciável de dimensão n e g é um campo tensorial do tipo $(0, 2)$ que é suave, simétrico e não degenerado em M .

DEFINIÇÃO 2.6 (VARIEDADE LORENTZIANA). Uma variedade pseudo-Riemanniana diz-se **Lorentziana** se g tem assinatura¹ $(- + \dots +)$.

OBSERVAÇÃO 2.7. Usaremos frequentemente a notação $\langle \cdot, \cdot \rangle_p \equiv g_p$, ou apenas $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

DEFINIÇÃO 2.8 (EVENTO). Um ponto $p \in M$ é chamado de **evento**.

EXEMPLO 2.9 (ESPAÇO DE MINKOWINSK). A variedade Lorentziana mais simples é o espaço de Minkowinsk, que consiste no espaço \mathbb{R}_1^n no caso em que $\eta = 1$, denotaremos por \mathbb{L}^n .

Observe que o sinal de menos na assinatura da métrica Lorentziana introduz algumas definições novas.

DEFINIÇÃO 2.10 (CARÁTER CAUSAL). Para cada vetor $v \in T_p M$, existem três possibilidades mutuamente exclusivas. Definimos o caráter causal de v da seguinte forma

- **v é tipo tempo:** se $\langle v, v \rangle < 0$;
- **v é tipo espaço:** se $\langle v, v \rangle > 0$;
- **v é tipo luz:** se $\langle v, v \rangle = 0$;

Na literatura, de modo geral, considera-se que o vetor nulo é do tipo espaço.

DEFINIÇÃO 2.11 (VETOR CAUSAL). Um vetor v que é do tipo tempo ou do tipo luz é dito **causal**.

EXEMPLO 2.12. Cada vetor do espaço de Minkowski \mathbb{L}^3 possui um e somente um dos três caracteres causais apresentados na definição 2.10. Seja $v = (x, y, z) \in \mathbb{L}^3$, e $c \in \mathbb{R}$, nos temos que

$$\langle v, v \rangle = c \iff x^2 + y^2 - z^2 = c. \tag{1}$$

Desse modo, identificando esses vetores no espaço. A expressão 1 determina:

- **um hiperboloide de uma folha:** se $c > 0$;
- **um hiperboloide de duas folhas:** se $c < 0$;
- **um cone:** se $c = 0$.

¹A assinatura de um tensor métrico é o número de autovalores positivos e negativos da matriz simétrica associada.

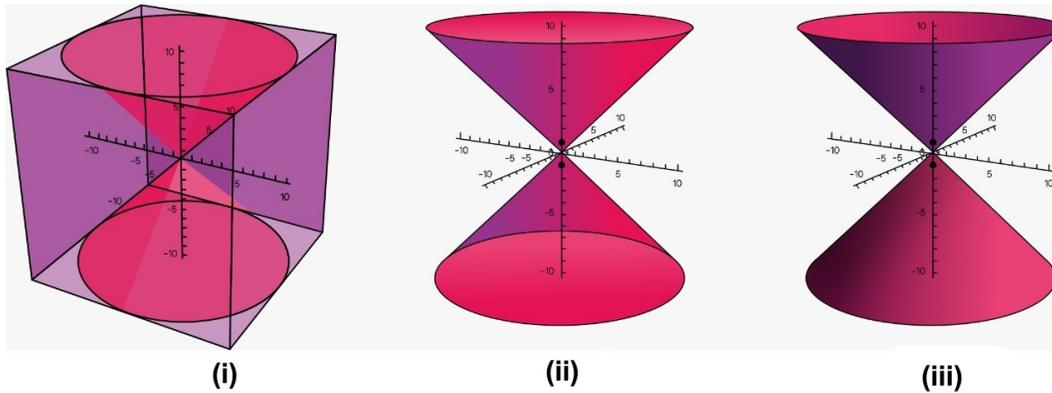


Figura 1 – Lugar geométrico dos vetores: (i) \mathcal{S} , (ii) \mathcal{L} e (iii) \mathcal{T} .

A figura 1 apresenta o lugar geométrico dos vetores em \mathbb{L}^3 determinado pelos seguintes conjuntos:

- o conjunto de todos os vetores tipo tempo do \mathbb{L}^3 : $\mathcal{T} := \{v \in \mathbb{L}^3 : \langle v, v \rangle < 0\}$;
- o cone de luz do \mathbb{L}^3 : $\mathcal{L} := \{v \in \mathbb{L}^3 : \langle v, v \rangle = 0\} \setminus \{(0, 0, 0)\}$;
- o conjunto de todos os vetores tipo espaço: $\mathcal{S} := \mathbb{L}^3 \setminus (\mathcal{L} \cup \mathcal{T})$.

Podemos estender esse conceito novo para as curvas em M .

DEFINIÇÃO 2.13 (CURVAS TIPO TEMPO, ESPAÇO E LUZ). Dizemos que uma curva $c : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ é do tipo tempo, espaço ou luz se o vetor tangente $c'(t)$ é do tipo tempo, espaço ou luz para todo $t \in I$.

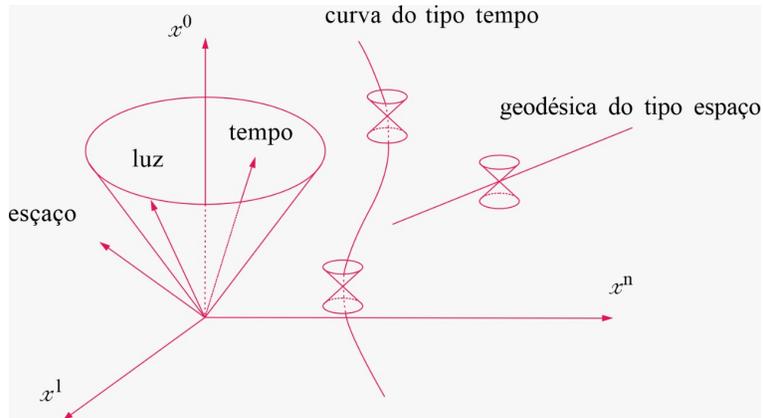


Figura 2 – Caráter causal de curvas

OBSERVAÇÃO 2.14. O caráter causal do vetor tangente de uma geodésica c não se altera uma vez que $\frac{d}{dt} \langle c', c' \rangle = 2 \langle \frac{Dc'}{dt}, c' \rangle = 0$.

DEFINIÇÃO 2.15 (CURVA CAUSAL). Uma curva em M que é do tipo tempo ou do tipo luz é dita **causal**.

Dado uma variedade Lorentziana arbitrária (M, g) , sabemos que em cada espaço tangente $T_p M$ (como por exemplo em todo espaço de Minkowski) existem dois cones temporais e ambos devem ter sentidos contrários. A escolha de qual cone temporal é cone futuro ou cone passado depende da base escolhida, o que determina uma orientação no espaço de Minkowski. Portanto, escolher um destes cones temporais equivale a orientar o espaço tangente $T_p M$.

Uma pergunta que poderíamos fazer é a seguinte: “Será que é possível orientar todos os espaços tangentes de M de uma maneira contínua?” Lembrando que escolher um cone temporal é na prática escolher um vetor

do tipo tempo $v_0 \in T_p M$; então, um vetor causal v está dirigido para o futuro se $g(v_0, v) < 0$ e para o passado se $g(v_0, v) > 0$.

DEFINIÇÃO 2.16 (CAMPO VETORIAL TIPO TEMPO). Seja (M, g) uma variedade Lorentziana. Dizemos que um campo vetorial $X \in TM$ é do **tipo tempo** se X_p é do tipo tempo para todo $p \in M$.

OBSERVAÇÃO 2.17. Num contexto geral, uma variedade Lorentziana não possui campos vetoriais do tipo tempo globalmente definidos.

DEFINIÇÃO 2.18 (VARIEDADE TEMPORALMENTE ORIENTÁVEL). Dizemos que uma variedade Lorentziana (M, g) é **temporalmente orientável** se existe uma função τ que atribui a cada ponto p um cone temporal $\tau_p \in T_p M$ e um campo vetorial do tipo tempo tais que $X_p \in \tau_p$ para todo $p \in M$. Neste caso, dizemos que τ é uma **orientação temporal** para M .

DEFINIÇÃO 2.19 (VETOR DIRIGIDO PARA O FUTURO (PASSADO)). Se $v \in T_p M$ é um vetor do tipo causal, dizemos que v é **dirigido para o futuro** se $v \in \tau_p$ e para o **passado** se $-v \in \tau_p$. Em outras palavras, v é dirigido para o futuro se $g(v, X_p) < 0$ e para o passado se $g(v, X_p) > 0$.

DEFINIÇÃO 2.20 (ESPAÇO-TEMPO). Uma variedade Lorentziana conexa temporalmente orientada é chamada um **espaço-tempo**.

De agora em diante, M denotará sempre um espaço-tempo.

DEFINIÇÃO 2.21 (ESPAÇO-TEMPO ORIENTÁVEL NO TEMPO). Um espaço-tempo (M, g) é dito ser **orientável no tempo** se existe um campo vetorial temporal, ou seja, um campo vetorial X satisfazendo $g(X, X) < 0$.

DEFINIÇÃO 2.22. Dados pontos $p, q \in M$,

- dizemos que p **precede q cronologicamente** e escrevemos $p \ll q$ se existe uma curva diferenciável do tipo tempo orientada para o futuro ligando p a q .
- dizemos que p **precede q causalmente** e escrevemos $p \leq q$ se $p = q$ ou se existe uma curva diferenciável causal orientada para o futuro ligando p a q . Além disso, p **precede q causalmente estritamente** e escrevemos $p < q$ se $p \leq q$ e $p \neq q$.

Estendemos a noção de orientação temporal para curvas contínuas:

DEFINIÇÃO 2.23 (CURVA CAUSAL ORIENTADA PARA O FUTURO). Uma curva contínua $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ é uma **curva causal orientada para o futuro** se para cada $t_0 \in (a, b)$ existe $\varepsilon > 0$ e uma vizinhança normal convexa V de $\gamma(t_0)$ contendo $\gamma(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ tal que para todos t_1, t_2 com $t_0 - \varepsilon < t_1 < t_2 < t_0 + \varepsilon$ existe uma curva causal orientada para o futuro em V de $\gamma(t_1)$ a $\gamma(t_2)$.

DEFINIÇÃO 2.24. Dado $p \in M$, definimos:

- futuro cronológico de $p := I^+(p) = \{q \in M : p \ll q\}$,
- passado cronológico de $p := I^-(p) = \{q \in M : q \ll p\}$,
- futuro causal de $p := J^+(p) = \{q \in M : p \leq q\}$,
- passado causal de $p := J^-(p) = \{q \in M : q \leq p\}$.

EXEMPLO 2.25 (ESTRUTURA CAUSAL DO ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI). Sejam $x, y \in \mathbb{R}_1^n$, temos que

- $x \ll y$ se, e somente se, $y - x$ é um vetor tipo-tempo futuro orientado;
- $x < y$ se, e somente se, $y - x$ é um vetor causal futuro-orientado.

Notamos, com isto, que no espaço-tempo de Minkowski $I^+(x)$ é a componente futura do cone de tempo em x e $J^+(x)$ é a união de $I^+(x)$ com o cone de luz futuro em x .

2.1 Condições de causalidade

Para aplicações físicas, é importante exigir que o espaço-tempo satisfaça condições razoáveis de causalidade.

DEFINIÇÃO 2.26 (CONDIÇÃO DE CRONOLOGIA E CAUSALIDADE). Diremos que M que satisfaz a **condição de cronologia** se não existem curvas tipo-tempo fechadas em M , e que satisfaz a **condição de causalidade** se não existem curvas causais fechadas em M .

PROPOSIÇÃO 2.27. *Se M é compacta, então contém uma curva tipo-tempo fechada.*

Demonstração. Pode ser encontrada em [1]. □

DEFINIÇÃO 2.28 (CONDIÇÃO FORTE DE CAUSALIDADE). Diremos que a **condição forte de causalidade** é válida em um ponto $p \in M$ se dada qualquer vizinhança U de p existe uma vizinhança $V \subseteq U$ de p tal que toda curva causal com ponto inicial e terminal em V está totalmente contida em U .

DEFINIÇÃO 2.29 (ESPAÇO-TEMPO FORTEMENTE CAUSAL). Diremos que M é **fortemente causal** se a condição forte de causalidade é satisfeita em todo ponto de M .

EXEMPLO 2.30 (CAUSALIDADE NÃO IMPLICA CAUSALIDADE FORTE). Uma variedade Lorentziana causal, mas não fortemente causal, é obtida tomando o espaço-tempo de Minkowski \mathbb{R}_1^2 , identificando as retas $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2; t = -2\}$ e $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2; t = 2\}$ e removendo as semirretas $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2; t = 1, x \leq -1\}$ e $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2; t = -1, x \leq 1\}$.

A próxima proposição irá motivar a definição da condição de causalidade mais importante que iremos tratar neste trabalho, a hiperbolicidade global.

DEFINIÇÃO 2.31 (SEPARAÇÃO TEMPORAL). Dados $p, q \in M$, a separação temporal $s(p, q)$ entre p e q é definida por

$$s(p, q) = \begin{cases} \sup_{\gamma} L[\gamma], & \text{se } q \in J^+(p) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

no qual o supremo é tomado sobre todas as curvas causais futuro-orientadas diferenciável por partes ligando p a q e, além disso, L é a função comprimento de arco Lorentziano (ver [1]). Se deixamos p e q variar em M , obtemos uma função $s : M \times M \rightarrow [0, +\infty]$ chamada função separação temporal.

PROPOSIÇÃO 2.32. *Para $p < q$ em uma variedade Lorentziana fortemente causal M , se o conjunto $J^+(p) \cap J^-(q)$ é compacto, então existe uma geodésica causal futuro-orientado de p a q com comprimento $s(p, q)$.*

Demonstração. Pode ser encontrada em [1]. □

DEFINIÇÃO 2.33 (CURVA CAUSAL INEXTENSÍVEL NO FUTURO (PASSADO)). Seja (M, g) um espaço-tempo orientado no tempo. Uma curva causal suave orientada para o futuro $c : (a, b) \rightarrow M$ (com possivelmente $a = -\infty$ ou $b = +\infty$) é dito ser **inextensível no futuro** se $\lim_{t \rightarrow b} c(t)$ não existir. A definição de um **inextensível no passado** a curva causal é análoga.

DEFINIÇÃO 2.34 (DOMÍNIO FUTURO DE DEPENDÊNCIA). O **domínio futuro de dependência** de $S \subseteq M$ é o conjunto $D^+(S)$ de todos os eventos $p \in M$ tais que qualquer curva causal inextensível no passado começando em p intercepta S .

DEFINIÇÃO 2.35 (DOMÍNIO PASSADO DE DEPENDÊNCIA). O **domínio passado de dependência** de S é o conjunto $D^-(S)$ de todos eventos $p \in M$ tais que qualquer curva causal futura inextensível começando em p intercepta S .

DEFINIÇÃO 2.36 (DOMÍNIO DE DEPENDÊNCIA). O domínio de dependência de S é simplesmente o conjunto $D(S) = D^+(S) \cup D^-(S)$.

DEFINIÇÃO 2.37 (HIPERSUPERFÍCIES DE CAUCHY). Seja (M, g) um espaço-tempo causal estável com função de tempo $t : M \rightarrow \mathbb{R}$. Os conjuntos de nível $S_a = t^{-1}(a)$ são ditos **hipersuperfícies de Cauchy do tipo espaço** se $D(S_a) = M$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO 2.38 (GLOBALMENTE HIPERBÓLICOS). Um espaço-tempo causal estável possuindo uma função de tempo cujo os conjuntos de nível são hipersuperfícies de Cauchy são **globalmente hiperbólicos**.

DEFINIÇÃO 2.39 (ESTAVELMENTE CAUSAL). Um espaço-tempo (M, g) é dito estavelmente causal se existir uma função sobrejetora e diferenciável $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{grad}(t)$ é do tipo tempo e $\text{grad}(t)$ é orientado no passado. Chamamos t de função temporal.

2.2 Condição de energia forte

Nesta seção iremos definir o que é uma variedade Lorentziana singular e também definir a condição de energia forte, conceitos esses importantes para a compreensão do teorema central deste trabalho.

Inicialmente vamos relembrar alguns conceitos definidos em Geometria Riemanniana, que servirão de motivação para definir o conceito de variedade Lorentziana singular.

DEFINIÇÃO 2.40 (GEODESICAMENTE COMPLETA). Uma variedade Riemanniana M é chamada **geodesicamente completa** se toda geodésica de M pode ser estendida a uma geodésica definida em todo \mathbb{R} .

Equivalentemente, M é geodesicamente completa se, e somente se, a aplicação exponencial \exp_p está definida em todo o espaço tangente $T_p M$, qualquer que seja o ponto $p \in M$.

EXEMPLO 2.41. O espaço Euclidiano \mathbb{R}^n satisfaz trivialmente esta condição, uma vez que suas geodésicas são retas.

EXEMPLO 2.42. O semi-plano superior $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ não é geodesicamente completo em relação à métrica Euclidiana $dx^2 + dy^2$. No entanto, é geodesicamente completo em relação à métrica hiperbólica $\frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$.

Em geometria Riemanniana temos o teorema de Holf-Rinow que nos dá condições suficientes para que uma variedade Riemanniana conexa seja geodesicamente completa. Esse teorema não vale no caso Lorentziano, uma vez que uma métrica Lorentziana não induz uma função distância. Devido a isso, a estratégia a ser adotada deve ser a contrária, isto é tentar buscar condições para que uma variedade Lorentziana seja “incompleta” (em outras palavras, singular).

DEFINIÇÃO 2.43 (VARIEDADE LORENTZIANA SINGULAR). Uma variedade Lorentziana (M, g) é dita **singular** se não é geodesicamente completa.

A incompletude geodésica é uma característica genérica de variedades Lorentzianas que satisfazem a condição de energia forte.

DEFINIÇÃO 2.44 (CONDIÇÃO DE ENERGIA FORTE). Dizemos que uma variedade Lorentziana (M, g) satisfaz a **condição de energia forte** se $\text{Ric}(V, V) \geq 0$ para qualquer campo vetorial do tipo tempo $V \in \mathcal{X}(M)$.

Vamos agora construir um referencial sincronizado. Para isso considere M um espaço-tempo globalmente hiperbólico e seja S uma superfície de Cauchy de M do tipo espaço. Sabemos que $\nabla t \perp S$ é um campo normal do tipo tempo em cada ponto $p \in S$. Com isso, considere W e $\tilde{W} \subseteq T^\perp S$ vizinhanças abertas que trivializam o fibrado normal à S , ou seja, $T^\perp S|_{\tilde{W}} \simeq W \subseteq \mathbb{R} \times S$. Nesse contexto definimos:

DEFINIÇÃO 2.45 (APLICAÇÃO EXPONENCIAL NORMAL). Seja (M, g) uma variedade Lorentziana globalmente hiperbólica e S uma hipersuperfície de Cauchy com normal unitária futura n . Seja c_p a geodésica do tipo tempo com condição inicial n_p para cada ponto $p \in S$. A **aplicação exponencial normal** $\exp : U \rightarrow M$ (definida numa vizinhança aberta U de $\{0\} \times S \subseteq \mathbb{R} \times S$) é aplicação $\exp(t, p) = c_p(t)$.

Ademais, se $q = \exp(s', p)$ é um valor não crítico da aplicação \exp e U tal que $p \in U$ denota uma vizinhança coordenada de $p \in S$. Com isso, podemos definir um sistema de coordenadas numa vizinhança de q da seguinte forma: seja (s, ϕ) , $\phi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow U$, um sistema de coordenadas em $\mathbb{R} \times U$. Note então que a composição ψ , tal que $(s, x^i) \mapsto \exp(s, \phi(x^i)) \in M$, define um sistema de coordenadas locais numa vizinhança de $c_p(s) \in M$, lembrando que $\phi(0) = p$. Observe que $\psi(se_1) = \exp(s, p) := c_p(s)$, aonde $\psi_*(s_0, 0)(e_1) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=s_0} \psi(se_1) = c'_p(s_0)$, o qual $\frac{\partial}{\partial s} = \psi_*(s, 0)(e_1)$ é tangente à geodésica ortogonal saindo de p . Computando as componentes de g com respeito ao sistema de coordenadas induzidas por ψ e assumindo que $\frac{\partial}{\partial s}$ seja unitário é fácil ver que $g\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s}\right) = 0$, já que em $s = 0$ a geodésica $c_p(s)$ é ortogonal a S .

DEFINIÇÃO 2.46 (PONTO FOCAL). Se existir um instante s_0 tal que (s_0, p) seja um ponto crítico, diremos que $\exp(s_0, p)$ é **ponto focal** de S .

Além disso, a métrica g numa vizinhança de q é dada por:

$$g = -ds^2 + \sum_{i,j} \gamma_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

em que $\gamma_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t^i}\right)$.

PROPOSIÇÃO 2.47. As formulas abaixo são verdadeiras

$$\begin{cases} \Gamma_{00}^0 = \Gamma_{00}^i = 0 \\ \Gamma_{0j}^i = \sum_k \gamma^{jk} \gamma^{il} \beta_{ki} \beta_{lj}. \end{cases}$$

em que $\gamma^{ki} := (\gamma_{ki})^{-1}$, $\beta_{kj} := \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t^k} \gamma_{kj}$.

Temos que

$$R_{00} := \text{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = -\frac{\partial}{\partial s} \left(\sum_{i,j} \gamma^{ij} \beta_{ij} \right) - \sum_{i,j,k,l} \gamma^{jk} \gamma^{il} \beta_{ki} \beta_{lj}.$$

DEFINIÇÃO 2.48 (EXPANSÃO DOS OBSERVADORES SINCRONIZADOS). A quantidade $\theta := \sum_{i,j} \gamma^{ij} \beta_{ij}$ é chamada de **expansão dos observadores sincronizados**.

3 Resultados utilizados na demonstração dos teoremas de Hawking

Nesta seção enunciaremos resultados que serão utilizados na demonstração do teorema de singularidade de Hawking. A demonstração da proposição 3.2 e do teorema 3.3 podem ser encontradas em [3].

PROPOSIÇÃO 3.1. *Sejam (M, g) um espaço-tempo globalmente hiperbólico e $S \subseteq M$ uma hipersuperfície de Cauchy e $p \in S$ tal que $\theta(p, 0) = \theta_0 < 0$. Vamos assumir que a condição forte de energia seja satisfeita, isto é, $\text{Ric}(V, V) \geq 0$ para todo campo unitário X do tipo tempo. Então, a geodésica c_p contém pelo menos um ponto focal a p em um instante máximo (medido em um parâmetro afim de tempo) de $-\frac{(n-1)}{\theta_0}$ no futuro de S (assumindo que a geodésica esteja definida pelo menos até este instante).*

Demonstração. Por hipótese nos temos que $R_{00} \geq 0$. Com isso nos podemos concluir que

$$\frac{\partial}{\partial s} \theta + \sum_{i,j,k,l} \gamma^{jk} \gamma^{il} \beta_{ki} \beta_{lj} \leq 0.$$

Assumindo um referencial ortonormal, teremos $\gamma^{ij} = \delta_{ij}$. De onde,

$$\sum_{i,j,k,l} \gamma^{jk} \gamma^{il} \beta_{ki} \beta_{lj} = \text{tr}(\beta_{ij})(\beta_{ij})^t \geq \frac{1}{n-1} \theta^2.$$

na qual usamos que:

$$(\text{tr } A)^2 \leq n \text{tr}(AA^t), A \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Portanto, concluimos que:

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{1}{3} \theta^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \theta}{\partial s} \leq -\frac{1}{3} \theta^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial s} \leq -\frac{1}{3}.$$

Mas

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial s} \leq -\frac{1}{3} &\Rightarrow \int_0^s \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial s'} ds' \leq \int_0^s -\frac{1}{3} ds' \\
&\Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{\theta^2} d\theta \leq -\frac{1}{3}s \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta} \geq -\frac{1}{3}s \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\theta} \geq \frac{1}{\theta_0} + \frac{1}{3}s.
\end{aligned}$$

Com isso, se $\theta \rightarrow \infty$, então

$$s \leq -\frac{3}{\theta_0},$$

de onde θ deve explodir em um instante até $-\frac{3}{\theta_0}$. \square

PROPOSIÇÃO 3.2. *Sejam (M, g) um espaço-tempo globalmente hiperbólico, S uma hipersuperfície de Cauchy, $p \in M$ e c uma geodésica do tipo tempo que passa por p e atinge S ortogonalmente. Se existir um ponto focal entre p e S , então c não maximiza comprimento (entre todas as outras geodésicas ligando p a S).*

TEOREMA 3.3 (AVEZ–SEIFERT). *Sejam (M, g) um espaço-tempo globalmente hiperbólico, S uma hipersuperfície de Cauchy e $p \in D^+(S)$. Então, dentre todas as curvas do tipo tempo ligando p a S existe uma curva do tipo tempo que maximiza a distância, e esta é uma geodésica do tipo tempo ortogonal a S .*

4 O Teorema de singularidade de Hawking

Agora estamos em condições para enunciar e provar o teorema central deste trabalho.

TEOREMA 4.1 (HAWKING). *Seja (M, g) um espaço tempo globalmente hiperbólico que satisfaz a condição forte de energia e, além disso, suponha que exista uma hipersuperfície de Cauchy S tal que a expansão θ cumpra a desigualdade: $\theta(p, 0) \leq \theta_0 < 0$, para todo $p \in S$. Então, nenhuma geodésica do tipo tempo orientada no futuro que comece ortogonal a S pode ser estendida ao futuro de S a um tempo próprio τ_0 maior que $-\frac{3}{\theta_0}$. Em outras palavras, M é singular.*

Demonstração. Vamos supor por absurdo que existe uma geodésica c que começa ortogonal a S , e é orientada no futuro definida em $[0, -\frac{3}{\theta_0} + \varepsilon]$, para algum $\varepsilon > 0$. Seja $p = c_p(\tau_0 + \varepsilon)$, $\tau := -\frac{3}{\theta_0}$. Note que $p \in 0D^+(S)$. Então, pelo Teorema de Avez–Seifert existe uma geodésica do tipo tempo γ ligando S a p que tenha o maior comprimento possível. Neste caso, $\tau(\gamma) \geq \tau_0 + \varepsilon$. No entanto, pela proposição, Σ tem um ponto focal ao longo de γ até no máximo τ_0 . Pela proposição, a geodésica γ não maximizaria o comprimento a partir deste ponto, o que é um absurdo. \square

OBSERVAÇÃO 4.2. A prova do teorema 4.1 não funciona no contexto da geometria Riemanniana, aonde as geodésicas são curvas minimizantes para o comprimento.

OBSERVAÇÃO 4.3. O teorema 4.1 é válido se trocarmos $\theta \geq \theta_0 > 0$ em S , com isso, nenhuma geodésica do tipo tempo ortogonal a S pode ser estendida a um tempo próprio maior que $\frac{3}{\theta_0}$ além do passado de S .

5 Exemplos

5.1 Solução de Schwarzschild

A primeira solução exata não trivial para as equações de campo de Einstein foi obtida pelo astrônomo e físico alemão Karl Schwarzschild, e foi encontrada em 1915, apenas um mês após a publicação da teoria da relatividade geral de Einstein. A solução de Schwarzschild descreve o campo gravitacional externo a um corpo esférico, com carga elétrica nula, porém desprezando qualquer rotação. Por essa razão, essa solução

é uma boa aproximação para campos gravitacionais de corpos de lenta rotação, tais como uma estrela, um planeta (como a Terra ou o Sol), ou um buraco negro.

A métrica de Schwarzschild em coordenadas esféricas, que pode ser encontrada em [2], é tal que

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(\frac{1}{1 - \frac{2m}{r}}\right) dr^2 - r^2(d\theta^2 - \sin^2(\theta)d\phi^2). \quad (2)$$

Em termos matriciais, temos

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2m}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}.$$

Os símbolos de Christoffel não nulos são

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2}g^{rr} \left(\frac{\partial g_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} - \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2}g^{rr} \left(\frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \right) = \frac{2m}{r^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)}, \quad (3)$$

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2}g^{rr} \left(\frac{\partial g_{tr}}{\partial t} + \frac{\partial g_{tr}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2}g^{rr} \left(-\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \right) = -\frac{m}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right), \quad (4)$$

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2}g^{tt} \left(\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} + \frac{\partial g_{rt}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tr}}{\partial t} \right) = \frac{1}{2}g^{tt} \left(\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \right) = -\frac{2m}{r^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)}, \quad (5)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2}g^{rr} \left(\frac{\partial g_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\theta r}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2}g^{rr} \left(-\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} \right) = -r \left(1 - \frac{2m}{r}\right), \quad (6)$$

$$\Gamma_{\theta r}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta r}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} \right) = -\frac{1}{r}, \quad (7)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = \frac{1}{2}g^{rr} \left(\frac{\partial g_{\phi r}}{\partial \phi} + \frac{\partial g_{\phi r}}{\partial \phi} - \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2}g^{rr} \left(-\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} \right) = -r \sin^2(\theta) \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \quad (8)$$

e

$$\Gamma_{\phi r}^{\phi} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi} \left(\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} + \frac{\partial g_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\partial g_{\phi r}}{\partial \phi} \right) = \frac{1}{2}g^{\phi\phi} \left(\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} \right) = -\frac{1}{r}. \quad (9)$$

Vamos calcular a curvatura no plano $(r - t)$. Escolhendo os vetores, temos

$$u = \hat{d}t \quad \text{e} \quad v = \hat{d}r. \quad (10)$$

Logo:

$$u^t = 1 \quad \text{e} \quad u^i = 0; \quad i \neq t; \quad \text{e} \quad (11)$$

$$v^r = 1 \quad \text{e} \quad v^i = 0; \quad i \neq r. \quad (12)$$

Abaixando os índices, temos:

$$u_t = g_{tt}u^t = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \quad \text{e} \quad v_r = g_{rr}v^r = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}}. \quad (13)$$

Assim, $u^m v_m = 0$, $u^m u_m = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)$, e $v^m v_m = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}}$.

Percebe-se que apenas a componente R_{rtr}^t do tensor de Riemann contribui nesse caso. Assim,

$$R_{rtr}^t = \Gamma_{rr}^m \Gamma_{tm}^t - \Gamma_{rt}^m \Gamma_{rm}^t + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{rr}^t - \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{rt}^t}_{=0} \quad (14)$$

$$R_{rtr}^t = \Gamma_{rr}^t \Gamma_{tt}^t + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{tr}^t + \Gamma_{rr}^\theta \Gamma_{t\theta}^t + \Gamma_{rr}^\phi \Gamma_{t\phi}^t - (\Gamma_{rt}^t \Gamma_{rt}^t + \Gamma_{rt}^r \Gamma_{rr}^t + \Gamma_{rt}^\theta \Gamma_{r\theta}^t + \Gamma_{rt}^\phi \Gamma_{r\phi}^t) - \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{rt}^t,$$

$$R_{rtr}^t = \Gamma_{rr}^r \Gamma_{tr}^t - \Gamma_{rt}^r \Gamma_{rr}^t - \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{rt}^t + \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{rr}^t,$$

$$R_{rtr}^t = -\frac{d}{dr} \left[\frac{2m}{r^2(1-\frac{2m}{r})} \right] - \left[\frac{2m}{r^2(1-\frac{2m}{r})} \right]^2,$$

$$R_{rtr}^t = \frac{2m}{r^4(1-\frac{2m}{r})^2} (2r-2m) - \frac{4m^2}{r^2(1-\frac{2m}{r})^2}$$

e

$$R_{rtr}^t = \frac{4mr-8m^2}{r^4(1-\frac{2m}{r})^2}.$$

Substituindo os termos encontrados anteriormente na fórmula da curvatura seccional (ver [5]), obtemos:

$$K(u, v) = \frac{\frac{4mr-8m^2}{r^4(1-\frac{2m}{r})^2} \cdot -\left(1-\frac{2m}{r}\right) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{-\left(1-\frac{2m}{r}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}\right) - 0^2} = \frac{4mr-8m^2}{r^4\left(1-\frac{2m}{r}\right)} = \frac{4m}{r^3}.$$

Concluimos, portanto, que o resultado final é o que se espera do ponto de vista físico. O horizonte está em $r = 2m$, e sua curvatura é $K = \frac{4m}{(2m)^3} = \frac{1}{2m^2}$ (é finita, pois a massa não é nula). A singularidade, por sua vez, está em $r = 0$, ponto em que K é infinita. Podemos, pois, concluir que a curvatura é finita no horizonte de eventos, mas diverge ao nos aproximarmos da singularidade. Por conseguinte, as curvas integrais de $\frac{\partial}{\partial r}$ são geodésicas do tipo tempo incompletas, uma vez que não podem ser continuadas para além da singularidade de curvatura em $r = 0$.

Ademias, a região $\{r < r_s\}$ da solução de Schwarzschild é globalmente hiperbólica (ver [3]) e satisfaz a condição de energia forte, uma vez que $\text{Ric} = 0$. A métrica nesta região é

$$g = -d\tau^2 + \left(\left(\frac{r_s}{r} \right)^{n-2} - 1 \right) dt^2 + r^2 f,$$

em que f é a métrica redonda em S^{n-1} , e $\tau = \int_r^{r_s} \left(\left(\frac{r_s}{u} \right)^{n-2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} du$.

Portanto o interior de um buraco negro de Schwarzschild pode ser visto como um cilindro $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ cuja forma varia no tempo: à medida que $r \rightarrow 0$, a esfera S^{n-1} contrai-se numa singularidade, ao passo que a direção da coordenada t se expande. Pode-se mostrar que a expansão da hipersuperfície de Cauchy $S = \{\tau = \tau_0\} = \{r = r_0\}$ é

$$\theta = \left(\left(\frac{r_s}{r_0} \right)^{n-2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{n-1}{r_0} - \frac{n}{2r_0} \left(\frac{r_s}{r_0} \right)^{n-1} \right).$$

Dessa forma, $\theta = \theta_0 < 0$ se r_0 é suficientemente pequeno, e o Teorema de Hawing nos garante que a solução de Schwarzschild é singular para o futuro de S . Além disso, o Teorema 4.1 implica que esta singularidade é genérica, ou seja, que qualquer perturbação suficientemente pequena da solução de Schwarzschild que satisfaça a condição de energia forte ainda é singular. Em termos gerais, pode-se dizer que nada pode impedir a formação de uma singularidade caso o colapso esteja suficientemente avançado.

5.2 Modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)

Seja (Σ, h) uma variedade Riemanniana de dimensão três cuja expressão local da métrica h em relação às coordenadas (r, θ, ϕ) é dada pela equação

$$h := a \left(\frac{1}{1-kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \right),$$

com $a > 0$, e $k = -1, 0, 1$.

Para considerarmos possíveis dilatações e contrações do universo, fazemos um produto vertical $\mathbb{R} \times \sigma$, e a constante a fica dependente do tempo. O espaço-tempo (FLRW) será, portanto, $\mathbb{R} \times \Sigma$ com a métrica

$$g = -dt^2 + a(t) \left(\frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \right).$$

As componentes não nulas do tensor de Ricci desta métrica são

$$\begin{cases} R_{00} = \frac{-3a''}{a}, \text{ e} \\ R_{\theta\theta} = R_{rr} = R_{\phi\phi} = \frac{2(a')^2}{a^2} + \frac{a''}{a} + \frac{2k}{a^2}. \end{cases}$$

Nesse modelo, supõe-se que o espaço se comporte como um fluido sem pressão e que o tensor energia momento varie apenas com tempo (devido à hipótese de isotropia). Em outras palavras, pedimos que $T = \rho dt^2$. Dessa forma, a equação de campo de Einstein se torna

$$\text{Ric}(g) = k\rho \left(dt^2 + \frac{1}{3}g \right).$$

Consequentemente, se $\rho > 0$, esse espaço satisfaz a condição de energia forte. Verifica-se, ainda, que, se $\beta_{ij} = \frac{a'}{a} \gamma_{ij}$, então $\theta = 3\frac{a'}{a}$. Suponhamos que o modelo se expanda em um instante t_0 . Nesse caso, $a'(t_0) > 0$. Logo, $\theta = \theta_0 = \frac{3a'}{a} > 0$ na superfície de Cauchy $t = t_0$, e, portanto, a observação 4.3 nos permite concluir que existe uma singularidade no passado de S — o que, do ponto de vista físico, corresponde a um *Big Bang*.

6 Conclusão

Existem várias versões dos teoremas de singularidades. No entanto, o teorema a seguir, que pode ser encontrado em [5], nos mostra que todas se encaixam em um mesmo padrão.

TEOREMA 6.1. *Se um espaço-tempo suficientemente diferenciável satisfaz uma condição de curvatura e uma condição de causalidade e contém um conjunto apropriado de condições iniciais, então ele contém geodésicas causais inextensíveis, mas incompletas (ou seja, contém singularidades).*

As condições de curvatura que um determinado espaço-tempo deve obedecer, para que valham os teoremas de singularidades, podem ser de dois tipos:

- condições de energia (forte ou tipo luz); ou
- condições genéricas.

O que essas condições de energia possuem em comum é que elas são restrições ao tensor de Riemann (tensor de curvatura). Precisamos delas para nos valermos das consequências da equação de Raychaudhuri (ver [1]) — a qual prevê que, na presença de matéria que satisfaça alguma das condições de energia, geodésicas de uma congruência que estejam convergindo inicialmente irão convergir de forma acelerada ou formar o que chamamos de cáustica (que nada mais é do que um ponto em que as geodésicas da congruência se interseccionam).

A principal razão para que as condições de causalidade apareçam nos teoremas de singularidades é o fato de que, por meio delas, é possível garantir a existência de geodésicas tipo tempo que maximizam localmente o tempo próprio e de geodésicas tipo luz que não podem ser deformadas em curvas tipo tempo. Essas curvas, por sua vez, são importantes pois não possuem cáusticas.

Conforme citamos anteriormente, quando o conteúdo de matéria do espaço-tempo satisfaz uma das condições de energia ou a condição genérica, a equação de Raychaudhuri pode prever a formação de cáusticas. Para assegurar a formação de cáusticas, contudo, é necessário que as geodésicas da congruência estejam convergindo inicialmente, e é isso que o teorema quer dizer com “condições iniciais”. Precisamos, portanto, de um objeto do espaço-tempo que nos dê essas geodésicas inicialmente convergentes — o qual,

por sua vez, depende do teorema de singularidade que estamos considerando. No contexto de colapsos gravitacionais, esses objetos são as superfícies aprisionadas, e, no contexto da cosmologia, esse papel é desempenhado pelas superfícies de Cauchy, *compact slice* e pontos com cones de luz reconvergindo.

O ponto de partida de todos os teoremas de singularidades é o mesmo: supor que o espaço-tempo não possua nenhuma geodésica causal incompleta. A partir daí, concluímos que, devido ao campo gravitacional, a existência da hipersuperfície de Cauchy Σ implica a existência de geodésicas causais que não contêm cáusticas. No entanto, como essas geodésicas estão convergindo inicialmente, e o conteúdo de matéria do nosso espaço tempo satisfaz a condição de energia, resulta da equação de Raychaudhuri que essas geodésicas inevitavelmente formarão uma cáustica, o que, por sua vez, é uma contradição — a qual nos leva, por fim, à conclusão de que o espaço tempo que estamos considerando é geodesicamente incompleto (isto é, singular).

Em suma, o que os teoremas de singularidades nos mostram é que, de acordo com a relatividade geral, a formação de singularidades no futuro de um colapso gravitacional ou no passado de um universo em expansão é inevitável.

Referências

- [1] NATÁRIO, J. — *An Introduction to Mathematical Relativity*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2021.
- [2] FOSTER, J. A.; NIGHTINGALE, J. D. — *A short course in General Relativity*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [3] GODINHO L. ; NATÁRIO J. — *An Introduction to Riemannian Geometry: With Applications to Mechanics and Relativity*. Universitext. Springer International Publishing, 2014.
- [4] WAWKING W.S.; ELLIS R.F.G.; LANSSHOFF V.P. — *The Large Scale Structure of SpaceTime*. Cambridge Monographs on Mathem. Cambridge University Press, 1973.
- [5] CARMO, M. P. — *Geometria riemanniana*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008.
- [6] GEROCH, ROBERT; HOROWITZ, GARY T. — *Global structure of spacetimes*. General Relativity: An introductory survey, p. 212, 2010.