Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Teoria de Nós-Uma Abordagem Computacional

Guilherme Malavasi de Lima

Resumo Este trabalho é uma breve introdução a teoria de nós.Nele apresentamos o conceito de nó e de seus invariantes.

Conteúdo

1 Introdução

1.1 O que são nós?

Intuitivamente,se pegarmos um pedaço de corda e dermos um nó,obteremos algo como na figura abaixo.

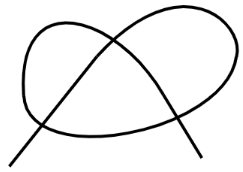


Figura 1: Overhand Knot

E é natural esperar que o nó não se solte.Então, como devemos definir o que é um nó matematicamente?Para isso,vamos "colar"as extremidades. Assim,é razoável definir um nó como.

Definição 1.1 *Um $K \subset \mathbb{R}^3$ é um* ***Nó****, se existe um homoemorfismo $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(S^1) = K$.*

Exemplos 1.1

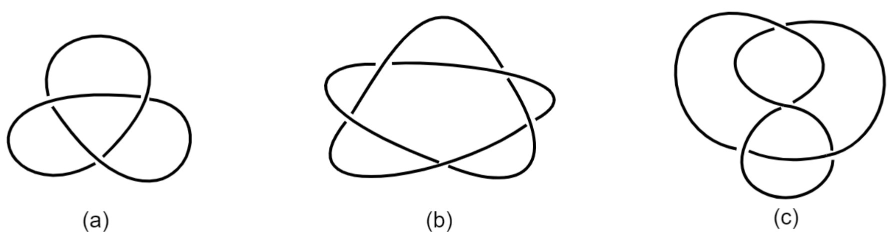


Figura 2: (a) treefoil,(b) cinquefoil,(c) eight knot

1.2 Quando dois nós são equivalentes?

Agora que sabemos o que é um nó,é natural perguntarmos quando dois nós são equivalentes.
É claro que a resposta não é: quando ele são homeomorfos,pois assim todos os nós seriam equivalentes.
Esperamos que a equivalência ocorra se pudermos manipular nosso nó de modo a obter um outro sem "contar e depois amarrar".Isso se traduz no seguinte.

Definição 1.2 *Dois nós* $K_i, i = 1, 2$, *são ditos* ***Equivalentes*** *,se existe um homeomorfismo* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $f(K_1) = K_2$.

Exemplos 1.2

1. *O Eight Knot é equivalente a sua "mirror image".*
2. *O Treefoil Knot não é equivalente ao nó trivial.*
3. *O Trivial Knot é equivalente ao nó obtido por "torcê-lo"uma vez.*

O fato que o Eight Knot é equivalente a sua imagem espelhada,pode ser provado usando os movimentos de Reidemeister(ver página 12 de [2])

1.3 Nós x Projeções

Apesar de nós serem subconjuntos do $\mathbb{R}^3$ homeomorfos ao S^1.Nos os representamos como figuras planas,ou seja,como projeções. Tais projeções,chamadas de

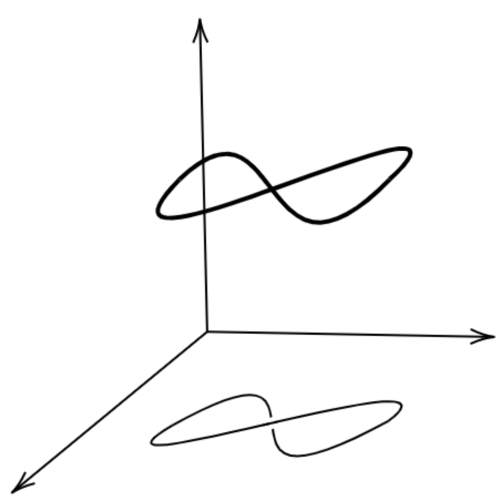


Figura 3: Projeção do nó no plano

diagramas de nó(ver figura 3),são diferente do que estamos acostumados,pois não projetam os pontos nas vizinhanças dos cruzamentos.Se dermos um zoom na região de cruzamento de um treefoil,por exemplo,veremos o seguinte (ver figura 4).

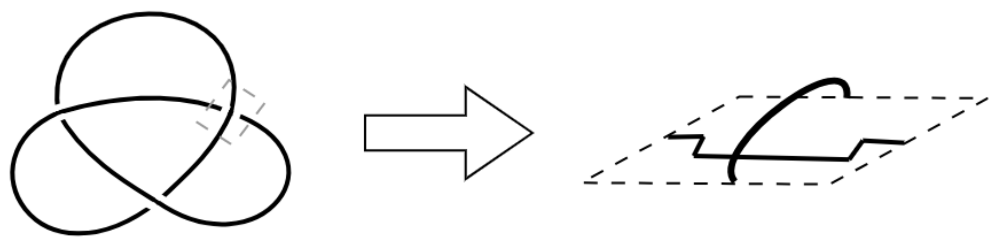


Figura 4: Ampliando um cruzamento do treefoil

2 O grupo de nó

O fato de dois nós serem equivalentes induz um homeomorfismo entre $\mathbb{R}^3 \backslash K_1$ e $\mathbb{R}^3 \backslash K_2$.Logo, o grupo fundamental de ambos é isomorfo.Assim,somos levados a seguinte definição.

Definição 2.1 *Para cada nó K associamos um grupo G_K,chamado de **grupo de nó** de K, definido por $G_K = \pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash K)$,i.e, o grupo fundamental de $\mathbb{R}^3 \backslash K$.*

Observação:Como o complemento de um nó é conexo por caminhos,iremos omitir o ponto base sempre que possível.

3 Apresentações

Em geral,por ser tratar de um grupo fundamental,não é fácil calcular o grupo de nó.Por outro lado,é razoavelmente fácil descrever o grupo de nó por meio de uma apresentação,que é nosso próximo passo. Relembremos algumas definições e teoremas.

Definição 3.1 *Dado um conjunto S não vazio,definimos o* ***grupo livre gerado por S*** *por*

$$\langle S \rangle = *_{\alpha \in S} \langle \alpha \rangle$$

onde $\langle \alpha \rangle = \{\alpha\} \times \mathbb{Z}$,munido da operação $(\alpha, m) \cdot (\alpha, n) = (\alpha, m + n)$.
Nos iremos identificar (α, n) com α^n e o produto como o produto usual de expoentes.

Definição 3.2 *Uma* ***apresentação*** *é um par (X,R),denotado por* $(X|R)$, *onde X é um conjunto não vazio e* $R \subset \langle X \rangle$. *Os elementos de X são chamados de* ***geradores*** *e os de R de* ***relatores****.Quando X e R são finitos,a apresentação é dita* ***finita****.*

Dada uma apresentação $(X|R)$ ela induz um grupo,chamado de grupo da apresentação,definido por

$$\langle X|R \rangle = \langle X \rangle / \overline{R}$$

onde $\overline{R}$ é o menor grupo normal contendo R.

3.1 Apresentação de Wirtinger

O fato dos diagramas de nós serem "uniões"de caminhos/arcos no plano,induz dois tipos de apresentações,chamadas de apresentação acima e abaixo.Em particular, estamos interessados na apresentação de Wirtinger que é uma apresentação acima.
Vamos descrever como obter uma apresentação de Wirtinger. Primeiro,note que podemos orientar os arcos que compõem o nó,de modo que a orientação em cada parte faça sentindo no nó todo.Em seguida,nomeamos cada arco que "passa por cima"de outro uma única vez por uma letra.Então, a **apresentação de Wirtinger** terá estas letras como geradores,satisfazendo a seguinte relação (ver figura 5).Aqui r é o arco que está "entrando"em x e l o que está "saindo".
Geometricamente,a apresentação de wirtinger é obtida "separando"os arcos determinados pelo cruzamentos,fixando um ponto p no complemento do nó e envolvendo cada arco com um loop saindo de p.
Observação:Por abuso de linguagem,diremos que o grupo de nó G_K tem apresentação $(X|R)$,se $G_K = \langle X|R \rangle$.

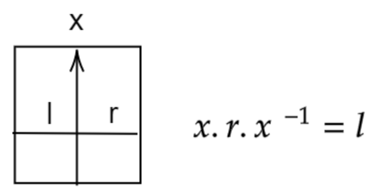


Figura 5: retrato do cruzamento do arco x

Exemplos 3.1

1. **Trivial Knot**.Para calcular a apresentação do círculo,precisamos torcê-lo uma vez para obter um cruzamento .Feito isso,e orientando no sentido horário,temos apenas um arco que o compõem,que o chamamos de **a**.Se olharmos o retângulo cinza pontilhado,veremos que o caminho que entra a direita e sai a esquerda de **a** é ele mesmo(pois só temos um caminho).Logo,a apresentação de Wirtinger do circulo é dada por

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash K) = \left\langle a | aaa^{-1} = a \right\rangle = \langle a | a = a \rangle = \langle a \rangle$$

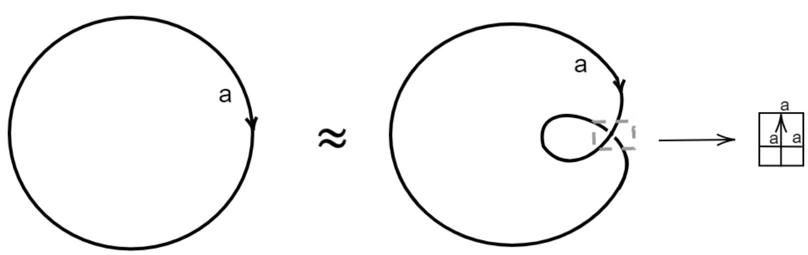


Figura 6: homeomorfismo entre o círculo e sua torção

2. **Two link crossing**.Novamente,orientamos ambos os círculos no sentindo horário e denotamos os arcos por **a** e **b**.Neste caso, tem se dois cruzamentos-**a** passando por **b** e **b** passando por **a**.Quando **b** passa sobre **a**(ver o retangulo pontilhado superior na figura 7),vemos que o único caminho que entra e sai de **b** é o próprio **a**,então

$$bab^{-1} = a \Rightarrow ab = ba$$

analogamente, para o outro caso

$$aba^{-1} = b \Rightarrow ab = ba$$

Portanto

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash K) = \langle a, b | ba = ab \rangle$$

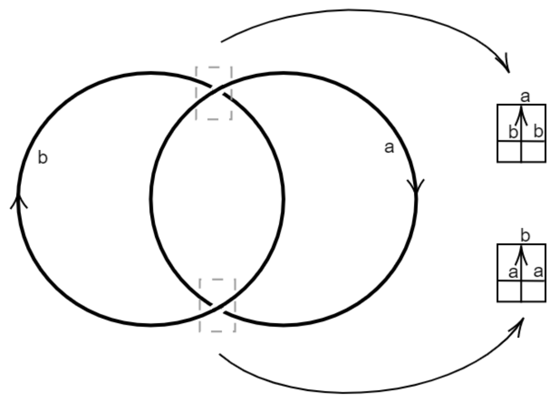


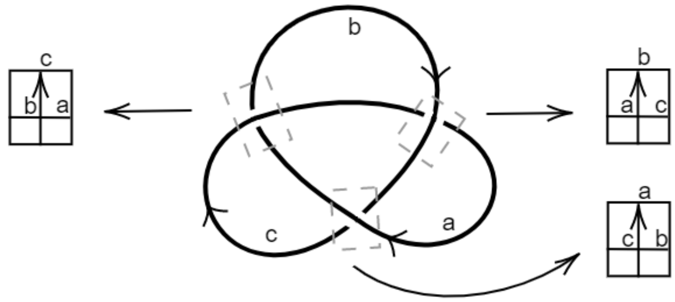
Figura 7: círculos lincados

3. **Treefoil Knot**.Chamando os arcos de **a**,**b**,**c**,e orientando no sentido horário.Vemos que cada cruzamento possui um arco entrando e outro diferente saindo.Analisando cada cruzamento,obtemos

$$bcb^{-1} = a$$
$$cac^{-1} = b$$
$$aba^{-1} = c$$

Portanto

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash K) = \left\langle a, b, c | bcb^{-1} = a, cac^{-1} = b, aba^{-1} = c \right\rangle$$



4 O Polinômio de Nó

Agora, iremos transpor o problema de determinar quando dois nós são equivalentes para o problema de decidir se ambos possuem o mesmo polinômio de nó.

4.1 Anel de Grupo

Definição 4.1 *Seja $(G, \cdot)$ um grupo multiplicativo.O* ***anel de grupo de G****,denotado por $\mathbb{Z}\langle G\rangle$,é o conjunto de todos os mapas $v : G \to \mathbb{Z}$, tais que $v(g) = 0$ exceto para uma quantidade finita de elementos de G.Munido das seguintes operações.*

$$(v_1 + v_2)g = v_1 g + v_2 g \tag{1}$$
$$(v_1 \cdot v_2) = \sum_{h \in G} (v_1 h)(v_2 h^{-1} g) \tag{2}$$

para qualquer $v_1, v_2 \in \mathbb{Z}\langle G\rangle$ e $g \in G$.

Para o que se segue é conveniente ter uma descrição melhor de anel de grupo. Considere o mapa $G \xrightarrow{*} \mathbb{Z}\langle G\rangle$ dado por

$$g^*(h) = \begin{cases} 1 & \text{se } h = g \\ 0 & \text{se } c.c \end{cases}$$

Observação:Aqui 1 é o elemento neutro da multiplicação no anel de grupo,e 0 elemento neutro em relação a adição.

É fácil ver que este mapa é injetor e preserva produto.Logo,ele é um isomorfismo(de grupos) sobre sua imagem.Assim,obtemos uma identificação dos elementos do anel de grupo,como combinações lineares.Mais precisamente,se $v \in \mathbb{Z}\langle G\rangle$,então,existem $g_1, ..., g_n \in G$ tais que

$$v = \sum_{i=1}^{n} n_i g_i^*$$
$$n_i = v(g_i)$$

com os n_i não nulos.

Teorema 4.1 (Propriedade Característica do Grupo Abeliano Livre) *Seja S um conjunto não vazio.Dado um grupo abeliano H e qualquer mapa $f : S \to H$,existe um homomorfismo $F = \tilde{f} : \mathbb{Z}\langle S\rangle \to H$ tal que o seguinte diagrama comuta.*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}\langle G\rangle \arrow[dr, "F"] & \\
S \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "f"] & H
\end{tikzcd}$$

4.2 O Calculo Livre

No caso em que $G = \langle x_1, ..., x_n\rangle$ é um grupo livre,os elementos de $\mathbb{Z}\langle G\rangle$ são combinações lineares finitas de produtos de potências de x_i.Assim,os elementos do anel de grupo são "polinômios"nas variáveis x_i.
Considere o mapa $t : G \to \mathbb{Z}$, onde G é um grupo,definido por $t(g) = 1, \forall g \in G$.Definimos o **trivializador**,também denotado por t, como o único homomorfismo(de anéis) $t : \mathbb{Z}\langle G\rangle \to \mathbb{Z}$ que estende t.Tal homomorfismo existe pela propriedade característica.Assim,se $v \in \mathbb{Z}\langle G\rangle$ temos $t(\sum_i n_i g_i) = \sum_i n_i$.

Definição 4.2 *Uma derivada em $\mathbb{Z}\langle G\rangle$ é um mapa $D : \mathbb{Z}\langle G\rangle \to \mathbb{Z}\langle G\rangle$ que satisfaz*

$$D(v_1 + v_2) = Dv_1 + Dv_2 \tag{3}$$
$$D(v_1 v_2) = (Dv_1)(tv_2) + v_1 Dv_2 \tag{4}$$

onde t é o trivializador e os $v_i \in \mathbb{Z}\langle G\rangle$.

Pela definição,é facil ver que

$$D(g_1g_2) = Dg_1 + g_1Dg_2 \tag{5}$$

para qualquer $g_1, g_2 \in G$.

Teorema 4.2 (Propriedades da derivada)

1. $D(\sum n_i g_i) = \sum n_i D(g_i)$
2. $Dn = 0$,para qualquer inteiro n.
3. $Dg^{-1} = -g^{-1}Dg$, $\forall g \in G$.

Embora tenhamos definido a derivada para anel de grupo qualquer,vamos usá-la apenas em grupos livres.

Teorema 4.3 *Para cada gerador x_j do grupo livre G, existe uma única derivada $D_j = \partial/\partial x_j \in \mathbb{Z}\langle G\rangle$ tal que*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \delta_{i,j}\ (delta\ de\ Kronecker)$$

O seguinte exemplo ilustra como derivar usando a definição e os teoremas 4.2 e 4.3

Exemplos 4.1 *Derive xy, yx e xy^{-1}em $\mathbb{Z}\langle x, y\rangle$.*

1. $\frac{\partial}{\partial x}(xy) = \frac{\partial}{\partial x}y + y\frac{\partial}{\partial x}x = 0 + 1 \cdot y = y$
2. $\frac{\partial}{\partial x}(yx) = \frac{\partial}{\partial x}x + x\frac{\partial}{\partial x}y = 1 + x \cdot 0 = 1$
3. $\frac{\partial}{\partial y}(xy^{-1}) = \frac{\partial}{\partial y}xt(y^{-1}) + x\frac{\partial}{\partial y}y^{-1} = 0 \cdot 1 - xy^{-1}\frac{\partial}{\partial y}y = -xy$

Note que pelo exemplo acima,temos $\frac{\partial}{\partial x}(xy) \neq \frac{\partial}{\partial x}(yx)$.

4.3 Matriz de Alexander

As matrizes de Alexander serão a base para nossa definição de polinômio de Alexander.
Lembremos da teoria de grupos que o **abelianizado** de G,denotado por $ab(G)$ é o grupo $G/[G,G]$,onde $[G,G] = \{ghg^{-1}h^{-1}|g,h \in G\}$. No que se segue, denotaremos por α o homomorfismo canônico de G em $G/[G,G]$. Tal homomorfismo pode ser estendido da mesma forma que fizemos para o trivializador.
Seja $X = \{x_i|i = 1,...,n\}$ um conjunto.Considere o homomorfismo canônico.

$$\gamma : \langle X\rangle \to \langle X|R\rangle$$

Assim,obtemos

$$\mathbb{Z}\langle X\rangle \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \mathbb{Z}\langle X\rangle \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}\langle X|R\rangle \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}\langle ab\langle X|R\rangle\rangle$$

Note que γ pode ser estendido pelo mesmo argumento usamos antes para α.

Definição 4.3 *A* ***matriz de Alexander*** *de* $(X|R)$ *é a matriz* (a_{ij}) *definida por*

$$a_{ij} = \alpha\gamma\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)$$

onde $R = \{r_i|i = 1,...,m\}$.

Num primeiro momento pode parecer estranho que as entradas sejam avaliadas em $\alpha\gamma$.Porém,isso simplifica os cálculos que estão por vir,alem de levar todos os elementos em um ambiente comutativo,que é necessário para garantir a existência do polinômio de nó.

4.4 O polinômio de Alexander

Agora estamos em condições de definir o que é um polinômio de nó.Estes serão usados para determinar quando dois nós são equivalentes.

Definição 4.4 *Para qualquer inteiro* $n \geqslant 0$, *o* ***k-ésimo polinômio de nó*** Δ_k *de uma apresentação finita* $(x_1,...,x_n|r_1,...,r_m)$ *de um grupo de nó,é o maximo divisor comum* *de todas as $(n-k)\times(n-k)$ sub-matrizes da matriz de Alexander da apresentação acima.Alem disso,convencionamos o seguinte:*

$$\Delta_k = 0 \text{ se } n-k > m$$
$$\Delta_k = 1 \text{ se } n-k \leqslant 0$$

*Quando $k=1$ dizemos que Δ_1 é o **polinômio de Alexander**.*

A existência e unicidade do polinômio de nó seguem dos seguintes teoremas.

Teorema 4.4 *O abelianizado de qualquer grupo de nó é cíclico e infinito.*

Teorema 4.5 *O anel de grupo de um grupo cíclico e infinito é um domínio de fatoração única,ou seja,vale o "teorema fundamental da aritmética".Logo,todo par de elementos no anel de grupo tem máximo divisor comum.*

Teorema 4.6 *O anel de grupo de um grupo cíclico infinito só tem unidades triviais,ou seja,somente as potências do gerador do grupo cíclico tem elemento inverso.*

Assim,obtemos

Teorema 4.7 *Os polinômios de nós existem e são únicos a menos de multiplicação por $\pm t^n$,onde n é um inteiro e t é um gerador do abelianizado do grupo da apresentação do grupo de nó.*

Usaremos os próximos dois teoremas adiante.

Teorema 4.8 *Seja $(x_1,...,x_n|r_1,...,r_m)$ a apresentação de Wirtinger de um dado grupo de nó.Então,*

$$\alpha\gamma x_i = \alpha\gamma x_j$$

$\forall i \in \{1,...,n\}$ e $\forall j \in \{1,...,m\}$.

Teorema 4.9 *Seja $(x_1,...,x_n|r=s)$ uma apresentação.Então*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(rs^{-1}) = \frac{\partial}{\partial x_j}(r-s) \tag{6}$$

Exemplos 4.2 *Vamos calcular os polinômios de Alexander dos seguintes nós.*

1. ***Trivial Knot***.*Primeiro, note que podemos escrever a apresentação do grupo de nó do circulo como* $(a|aa^{-1})$.*Logo,pelo teorema* 4.9

$$\frac{\partial}{\partial a}aa^{-1} = \frac{\partial}{\partial a}a - aa^{-1}\frac{\partial}{\partial a}a = 0$$

Assim, a matriz de Alexander da apresentação só contem o polinômio nulo e,portanto

$$\begin{aligned}\Delta_k =& 1 \text{ se } k \geqslant 1\\ \Delta_0 =& 0\end{aligned}$$

2. ***Two Link Crossing***.*Vimos anteriormente que o grupo de nó de dois círculos lincados é*

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash K) = \langle x, y | xy = yx \rangle$$

Seja $A = (a_{11} \;\; a_{12})$ *a matriz de Alexander.Então,pelos teoremas* 4.9 *e* 4.2,*obtemos*

$$a_{11} = \alpha\gamma\frac{\partial}{\partial x}xy(yx)^{-1} = \alpha\gamma\frac{\partial}{\partial x}(xy - yx) = \alpha\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x}xy - \frac{\partial}{\partial x}yx\right) = \alpha\gamma(1-y)$$

e

$$a_{12} = \alpha\gamma\frac{\partial}{\partial y}xy(yx)^{-1} = \alpha\gamma\frac{\partial}{\partial y}(xy - yx) = \alpha\gamma\left(\frac{\partial}{\partial y}xy - \frac{\partial}{\partial y}yx\right) = \alpha\gamma(x-1)$$

Agora, pelo teorema 4.8,*temos* $\alpha\gamma x = \alpha\gamma y = t$.*Logo, a matriz de Alexander é*

$$A = \begin{pmatrix}1-t & -1+t\end{pmatrix}$$

De onde segue que

$$\begin{aligned}\Delta_1 =& 1-t\\ \Delta_k =& 1 \text{ se } k > 1\\ \Delta_0 =& 0\end{aligned}$$

3. ***Treefoil Knot***.*Procedendo como antes, e notando que podemos simplificar a apresentação do treefoil para*

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash K) = \langle x, y | xyx = yxy \rangle$$

(Basta trocar a,b e c por x,y e z ,respectivamente.Substituir a relação com z nas outras duas e notar que ambas são a mesma).Seja $A = (a_{11} \;\; a_{12})$ a matriz de Alexander.Então

$$a_{11} = \alpha\gamma\frac{\partial}{\partial x}xyx(yxy)^{-1} = \alpha\gamma(1 + xy - y)$$

e

$$a_{12} = \alpha\gamma\frac{\partial}{\partial y}xyx(yxy)^{-1} = \alpha\gamma(x - 1 + -yx)$$

Fazendo $\alpha\gamma x = \alpha\gamma y = t$.Obtemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 - t + t^2 & -1 + t - t^2 \end{pmatrix}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \Delta_1 =& 1 - t + t^2 \\ \Delta_k =& 1 \text{ se } k > 1 \\ \Delta_0 =& 0 \end{aligned}$$

4. ***Eight Knot***.*Usando os metodos desenvolvidos,podemos mostrar que a apresetação de Wirtinger do Eight Knot é*

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash K) = \left\langle x, y | yx^{-1}yxy^{-1} = x^{-1}yxy^{-1}x \right\rangle$$

Seja $A = (a_{11} \;\; a_{12})$ a matriz de Alexander.Derivando e usando o teorema 4.9,obtemos

$$\begin{aligned} a_{11} &= t - 3 - t^{-1} \\ a_{12} &= -t + 3 + t^{-1} \end{aligned}$$

Agora,pelo teorema 4.7, podemos multiplicar os elementos da matriz de Alexander por t,sem alterar os polinômios de nó.Portanto

$$\begin{aligned} \Delta_1 =& 1 - 3t + t^2 \\ \Delta_k =& 1 \text{ se } k > 1 \\ \Delta_0 =& 0 \end{aligned}$$

Quando as apresentações possuem muitos geradores,se faz necessário obter uma ferramenta para reduzir a matriz de Alexander,isto é feito por meio dos ideais elementares.

Teorema 4.10 (Invariância do Polinômio de Nó) *Sejam K_1, K_2 nós e $(X|R)$, $(Y|S)$ as respectivas apresentações de seus grupos de nó.Se o grupo das apresentações são isomorfos.Então, existe um homomorfismo que leva polinômios de nó em $(X|R)$ para polinômios de nó em $(Y|S)$.*

Em vista deste teorema,concluímos que os nós na figura 2 são dois a dois não equivalentes. Apesar da força dessa maquinaria que aqui desenvolvemos,tais ferramentas não são capazes de distinguir,por exemplo,o **Granny Knot** do **Square Knot**(ver pagina 131 de [1]).

Referências

[1] Richard H. Crowell,Ralph H. Fox,*Introduction to Knot Theory*, Springer.

[2] Colin C. Adams,*The Knot Book-An Elementary Introduction to the Mathematical Knot Theory*, W.H Freeman and Company-New York.

[3] John M. Lee,*Introduction to Topological Manifolds*, Springer.