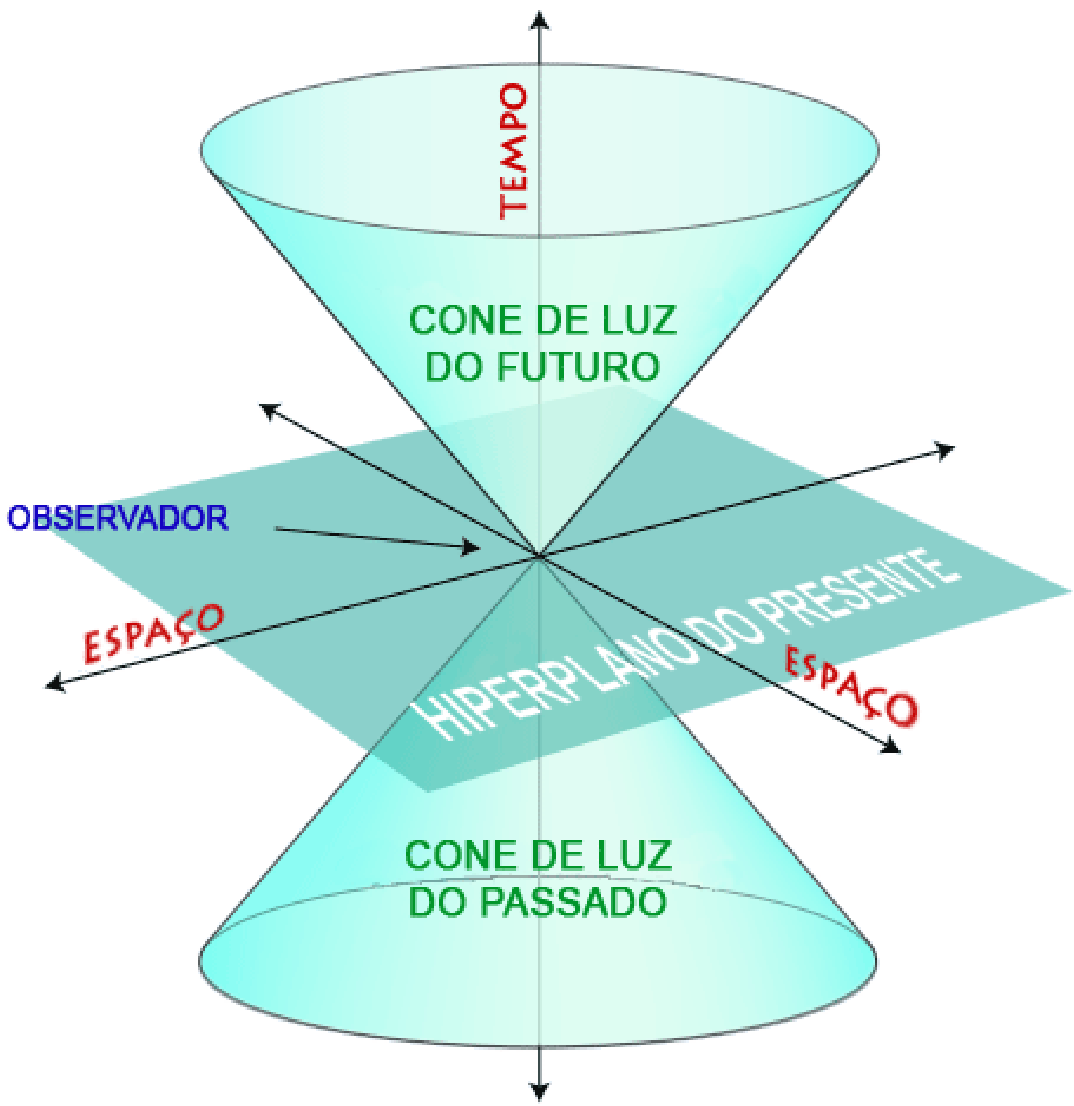
Tópicos de Relatividade Especial

Rafael Severiano



Trabalho apresentado para a disciplina: Tópicos de Física Matemática - MAT0463.

Professor: Cristian Andres Ortiz Gonzalez.

Conteúdo

1 Introdução.

Vamos começar este trabalho fazendo uma breve revisão de história da física. Neste curso estudamos as equações de Maxwell

$$\nabla \cdot E = \rho$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times B = J + \frac{\partial E}{\partial t}.$$

No formalismo visto no curso:

$$dF = 0$$

$$\star\, d \star F = J.$$

No entanto, sabemos que a força magnética agindo sob uma partícula de carga q e velocidade v é dada por

$$F = q(v \times B).$$

Fica a pergunta: em qual referencial estamos fazendo o nosso estudo?

Os físicos postularam a existência de um referencial privilegiado, chamado de éter, no qual a luz se propaga e onde as equações do eletromagnestismo são válidas.

No entanto, experimentos revelaram a inexistência deste éter. Um dos mais famosos experiementos que mostraram a não existência do éter foi o experimento de Michelson e Morley.

Foi neste contexto que surgiu a revolucionária teoria da relatividade especial de Albert Einstein. Ele postulou os seguintes fatos:

1. As leis da física são as mesmas em qualquer referencial inercial.

2. A velocidade da luz é a mesma em qualquer referencial.

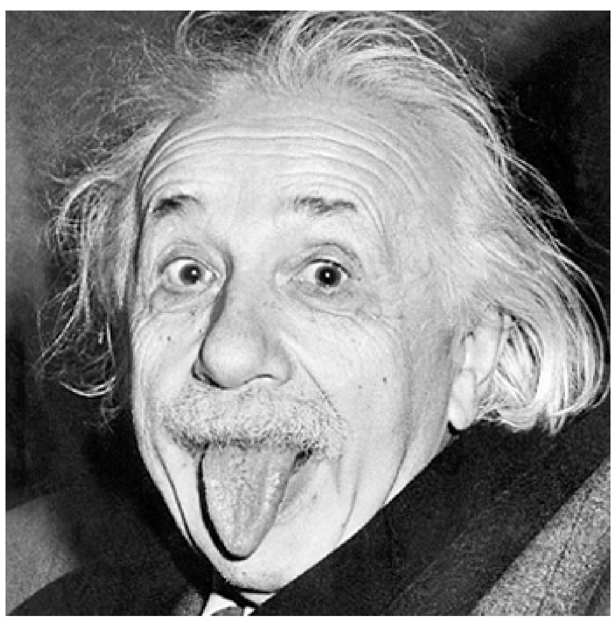


Figura 1: Albert Einstein.

Estes postulados tiveram conclusões supreendentes para a física. Como por exemplo o fato de que o tempo não é uma grandeza absoluta e pode variar de um referencial para o outro, o que também acontece com o comprimento.

O intuito deste trabalho é mostrar um pouco do formalismo matemático da relatividade especial. Em relatividade especial, não abordamos fenômenos gravitacionais, tudo o que precisaremos para fazer este trabalho é do espaço $\mathbb{R}^n$ munido de uma certa forma bilinear, chamada de métrica de Minkowski. Em relatividade geral estamos interessados em trabalhar com gravitação, para isso precisamos de conceitos mais complexos, como por exemplo variedades pseudoriemannianas e curvatura.

2 O ambiente da relatividade espacial.

Vamos fazer algumas definições que serão necessárias para o nosso estudo:

Definição 2.1. *Chamamos de $\mathbb{R}^n_v$ o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ munido da seguinte forma bilinear:*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_v : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x_1 y_1 + ... + x_{n-v} y_{n-v} - x_{n-v+1} y_{n-v+1} - ... - x_n y_n$$

Quando $v = 1$, denotamos $\mathbb{R}^n_v$ por L^n, e chamamos este espaço vetorial de espaço de Lorentz-Minkoswki.

É importante observar que, apesar da notação utilizada, não necessariamente $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$ define um produto interno em $\mathbb{R}^n$. É uma forma bilinear e simétrica, mas não necessariamente positiva-definida. A partir de $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$ podemos definir uma noção de comprimento em $\mathbb{R}^n$ da forma natural

$$\| \cdot \|_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{|\langle x, x \rangle_v|}$$

Também é verdade que não necessariamente $\| \cdot \|_v$ define uma norma em $\mathbb{R}^n$. Porém, podemos através de $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$ e $\| \cdot \|_v$ definir de forma natural uma série de noções geométricas que estudamos em espaços vetoriais com produto interno, como por exemplo distância, ortogonalidade e isometrias.

Considere a seguinte matriz:

$$Id_{n-v,v} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & 1 & & & \\ \hline & & & -1 & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \text{n-v} \\ \\ \\ \text{v} \\ \\ \end{array}$$

Se x, y são elementos de $\mathbb{R}^n_v$ temos que:

$$\langle x, y \rangle_v = x^t Id_{n-v,v} y.$$

Agora, vamos definir os tipos de vetores de $\mathbb{R}^n_v$:

Definição 2.2. *Seja x um elemento de $\mathbb{R}^n_v$. Temos que*

1. *x é do tipo espaço se $\langle x, x \rangle_v > 0$ ou $x = 0$.*

2. *x é do tipo tempo se $\langle x, x \rangle_v < 0$.*

3. *x é do tipo luz se $\langle x, x \rangle_v = 0$ e $x \neq 0$.*

O espaço natural para estudarmos a teoria da relatividade especial é o espaço de Lorentz-Minkowski L^4. Chamamos os seus elementos (x, y, z, t) de eventos. Podemos pensar nas primeiras três coordenadas como sendo coordenadas espaciais e na última coordenada como uma coordenada temporal.

Vamos contextualizar as definições feitas com a teoria da relatividade espacial. Por simplicidade, vamos considerar que a velocidade da luz c é igual a 1. Dizemos que dois eventos são simultâneos se ocorrem ao mesmo tempo. Sejam p e q eventos não simultâneos e seja $p-q=(\Delta x,\Delta y,\Delta z,\Delta t)$. Temos que

$$\langle p-q,p-q\rangle_1=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2-(\Delta t)^2=(\Delta t)^2\left(\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2-1\right),$$

logo

$$\langle p-q,p-q\rangle_1=(\Delta t)^2\left(\left\|\left(\frac{\Delta x}{\Delta t},\frac{\Delta y}{\Delta t},\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)\right\|^2-1\right)=(\Delta t)^2\left(\left\|\left(\frac{\Delta x}{\Delta t},\frac{\Delta y}{\Delta t},\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)\right\|+1\right)\left(\left\|\left(\frac{\Delta x}{\Delta t},\frac{\Delta y}{\Delta t},\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)\right\|-1\right),$$

segue que o sinal de $\langle p-q,p-q\rangle_1$ é o mesmo de $\left\|\left(\frac{\Delta x}{\Delta t},\frac{\Delta y}{\Delta t},\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)\right\|-1$. Temos que:

1. Se $p-q$ é do tipo espaço, então $\left\|\left(\frac{\Delta x}{\Delta t},\frac{\Delta y}{\Delta t},\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)\right\|>1$, logo o evento p não pode ter influenciado q nem ter sido influenciado por ele, pois isto iria contradizer o fato que nada se move mais rápido do que a luz.
2. Se $p-q$ é do tipo tempo, então $\left\|\left(\frac{\Delta x}{\Delta t},\frac{\Delta y}{\Delta t},\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)\right\|<1$, logo p pode ter sido influenciado por q se $\Delta t>0$ e q pode ter sido influenciado por p se $\Delta t<0$. A influência pode ter sido causada por um disparo de arma de fogo por exemplo.
3. Se $p-q$ é do tipo luz, então $\left\|\left(\frac{\Delta x}{\Delta t},\frac{\Delta y}{\Delta t},\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)\right\|=1$, logo p pode ter sido influenciado por q ou q pode ter sido influenciado por p. A influência pode ter sido causada por um sinal luminoso por exemplo.

3 Isometrias.

Em $\mathbb{R}^n$ temos as seguintes definições equivalentes para isometrias:

Definição 3.1. *Uma função $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ é dita uma isometria se ocorre alguma das afirmações equivalentes:*

1. $\|x-y\|=\|F(x)-F(y)\|$ *para quaisquer* $x,y\in\mathbb{R}^n$.
2. $\langle x-y,x-y\rangle=\langle F(x)-F(y),F(x)-F(y)\rangle$ *para quaisquer* $x,y\in\mathbb{R}^n$.

Temos também as seguintes definições equivalentes para operador ortogonal:

Definição 3.2. *Uma operador $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ é dito ortogonal se ocorre alguma das afirmações equivalentes:*

1. *T preserva norma.*
2. *T preserva produto interno.*
3. *T leva bases ortonormais em bases ortonormais.*
4. $TT^*=T^*T=I$.
5. *Se B é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ então $[T]_B$ é ortogonal.*

Note que se $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ é um operador ortogonal então o determinante de T é ±1. Podemos também classificar todas as isometrias de $\mathbb{R}^n$:

Teorema 3.1. *Se $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ é uma isometria, então existe uma translação*

$$T_a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$$
$$v\mapsto a+v$$

e um operador ortogonal $O:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ tal que

$$F=T_a\circ O.$$

Nesta seção faremos um estudo sobre as isometrias de $\mathbb{R}^n_v$. Vamos começar fazendo algumas definições:

Definição 3.3. *Uma função $F:\mathbb{R}^n_v\to\mathbb{R}^n_v$ é dita uma isometria se para quaisquer $x,y\in\mathbb{R}^n_v$ vale que*

$$\langle x-y,x-y\rangle_v=\langle F(x)-F(y),F(x)-F(y)\rangle_v.$$

Definição 3.4. *Um operador $T : \mathbb{R}^n_v \to \mathbb{R}^n_v$ é dito ortogonal se preserva produto interno.*

Vamos fazer alguns comentários. Note que se $T : \mathbb{R}^n_v \to \mathbb{R}^v_n$ preserva norma ou leva bases ortonormais em bases ortonormais não necessariamente será um operador ortogonal. Considere o seguinte contra exemplo:

$$T : L^2 \to L^2$$

$$(x, y) \mapsto (y, x)$$

Temos que T preserva norma e leva bases ortonormais em base ortonormais, porém T não preserva produto interno. No entanto é verdade que se um operador em $\mathbb{R}^n_v$ é ortogonal então ele preserva norma e leva bases ortonormais em bases ortonormais. Também temos que um operador $T : \mathbb{R}^n_v \to \mathbb{R}^n_v$ é ortogonal se e somente se

$$[T]^t_{\text{can}} Id_{n-v,v} [T]_{\text{can}} = Id_{n-v,v},$$

o que mostra que operadores ortogonais em $\mathbb{R}^n_v$ possuem determinante ± 1, assim como em $\mathbb{R}^n$.

Valem os seguintes resultados:

Teorema 3.2. *O conjunto dos operadores ortogonais de $\mathbb{R}^v_n$, $\mathcal{O}^v_n$, formam um grupo com a operação de composição.*

No caso em que $v = 1$, chamamos este grupo de grupo de Lorentz.

Teorema 3.3 (Classsficação das isometrias de $\mathbb{R}^n_v$)**.** *Se $F : \mathbb{R}^n_v \to \mathbb{R}^n_v$ é uma isometria, então existe uma translação*

$$T_a : \mathbb{R}^n_v \to \mathbb{R}^n_v$$

$$v \mapsto a + v$$

e um operador ortogonal $O : \mathbb{R}^n_v \to \mathbb{R}^n_v$ tal que

$$F = T_a \circ O.$$

Podemos deduzir que em $\mathbb{R}^n_v$ o conjunto das isometrias é um grupo com a operação de composição, assim como ocorre em $\mathbb{R}^n$.

4 O grupo de Lorentz.

Nesta seção faremos um breve estudo do grupo de Lorentz $\mathcal{O}^1_n$. Vamos começar esta seção fazendo algumas definições que serão importantes para o nosso estudo:

Definição 4.1. *Um vetor $v = (v_1, ..., v_n)$ de L^n de tipo tempo ou luz é dito:*

1. *Futuro-dirigido se $v_n > 0$.*
2. *Passado-dirigido se $v_n < 0$.*

Note que se p, q são elementos de L^4 e $p - q$ é de tipo tempo ou luz, $p - q$ ser futuro-dirigido significa que o evento p ocorreu após o evento q, temos que q pode ter influenciado p. Se $p - q$ é passado-dirigido então p ocorreu antes de q e pode ter influenciado q. Este comentário motiva a definição acima.

Definição 4.2. *Dizemos que uma base ortonormal $\{v_1, ..., v_n\}$ é:*

1. *Futuro-orientada se v_n é futuro-dirigido.*
2. *Passado-orientada se v_n é passado-dirigido.*

Definição 4.3. *Seja $T : L^n \to L^n$ um operador ortogonal. Se $\{v_1, ..., v_n\}$ é uma base ortonormal, sabemos que as colunas da matriz*

$$[T]_{can} (v_1, ..., v_n)$$

formam uma base ortonormal de L^n. Dizemos que T é ortocrônico se para toda base ortonormal $\{v_1, ..., v_n\}$ futuro-orientada as colunas de

$$[T]_{can} (v_1, ..., v_n)$$

formam uma base ortonormal futuro-orientada.

Teorema 4.1. *O conjunto $\mathcal{O}^{1\uparrow}_n$ dos operadores ortocrônicos é um subgrupo do grupo de Lorentz $\mathcal{O}^1_n$.*

Vamos encerrar esta seção descrevendo o grupo de Lorentz $\mathcal{O}_2^1$. Seja $T : L^2 \to L^2$ um elemento do grupo $\mathcal{O}_2^1$ e seja

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

temos que

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

o que implica que

$$a^2 - c^2 = 1,$$

$$d^2 - b^2 = 1$$

e

$$ab - cd = 0.$$

Quando vamos deduzir quais são as matrizes ortogonais de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, chegamos em relações que nos induzem a introduzir funções trigonométricas para que possamos resolver o problema. As relações acima nos induzem a introduzir funções trigonométricas hiperbólicas para encontrarmos a, b, c e d. Utilizando esta técnica, podemos concluir que

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \operatorname{senh}(\theta) \\ \operatorname{senh}(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix}$$

ou

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \operatorname{senh}(\theta) \\ -\operatorname{senh}(\theta) & -\cosh(\theta) \end{pmatrix}$$

ou

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} -\cosh(\theta) & -\operatorname{senh}(\theta) \\ \operatorname{senh}(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix}$$

ou

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} -\cosh(\theta) & \operatorname{senh}(\theta) \\ \operatorname{senh}(\theta) & -\cosh(\theta) \end{pmatrix}$$

para certo θ real.

5 Causalidade.

Encerraremos este trabalho falando sobre causalidade e explicando sobre a origem do fator de Lorentz:

Definição 5.1. *Sejam e_1, e_2 elementos de L^4. Dizemos que e_1 precede causalmente e_2 se $e_2 - e_1$ é do tipo tempo ou luz e não é passado-dirigido. Neste caso, iremos usar a notação*

$$e_1 \prec e_2.$$

Teorema 5.1. *A relação de causalidade $\prec$ define uma ordem parcial em L^4. Ou seja: é uma relação reflexiva, antissimétrica e transitiva.*

Podemos nos perguntar se isometrias de L^4 preservam a relação de causalidade, o que é algo de grande interesse físico. A resposta é negativa. Veja o seguinte contraexemplo:

$$T : L^4 \to L^4$$

$$(x, y, z, t) \mapsto (x, y, z, -t)$$

Precisamos então de uma nova definição:

Definição 5.2. *Dizemos que uma isometria $\phi : L^4 \to L^4$ é causal se preserva a relação de causalidade. Ou seja:*

$$x \prec y \Rightarrow \phi(x) \prec \phi(y)$$

para quaisquer $x, y \in L^4$.

Podemos mostrar que o conjunto das isometrias causais de L^4 formam um grupo. Um exemplo de elemento deste grupo são as isometrias da forma

$$\phi_\theta : L^4 \to L^4$$

$$(x, y, z, t) \mapsto (x \cosh(\theta) + t \operatorname{senh}(\theta), y, z, x \operatorname{senh}(\theta) + t \cosh(\theta))$$

onde θ é um número real. Temos que uma transformação de Lorentz

$$L : L^4 \to L^4$$

$$(x, y, z, t) \mapsto \left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, y, z, \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}} \right)$$

onde $|v| < 1$ será da forma ϕ_θ para certo θ real.

Vamos agora explicar a ideia por trás das transformações de Lorentz. Considere uma onda eletromagnética que se desloca ao longo do eixo x. Podemos representar esta onda por meio de uma função de duas variáveis $\psi(x, t)$, que recebe a posição x ocupada pela onda no instante t e retorna a sua posição y. Temos que a equação de onda

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(x, t) = 0$$

é satisfeita para quaisquer x, t em $\mathbb{R}$.

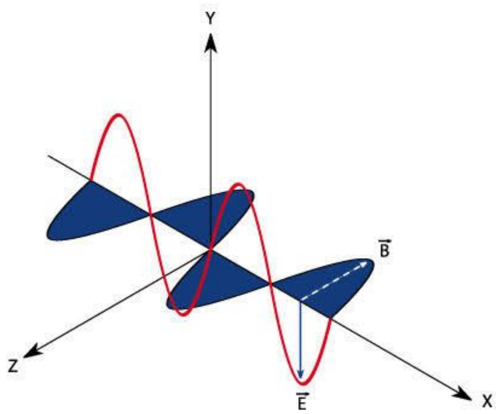


Figura 2: Representação de uma onda eletromagnética.

Vamos considerar uma mudança de coordenadas com a seguinte forma:

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (ax + bt, cx + dt)$$

Estamos interessados em uma mudança de coordenadas que preserva a equação de onda. Ou seja, se $\psi_L = \psi \circ L$, queremos que ψ_L satisfaça a equação de onda.

Pela regra da cadeia e o teorema de Schwarz podemos concluir que

$$\frac{\partial^2 \psi_L}{\partial x^2}(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(L(x, t)) + 2ac \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t}(L(x, t)) + c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(L(x, t)).$$

Da maneira análoga, podemos concluir que

$$\frac{\partial^2 \psi_L}{\partial t^2}(x, t) = b^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(L(x, t)) + 2bd \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t}(L(x, t)) + d^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(L(x, t)).$$

Temos então que

$$\frac{\partial^2 \psi_L}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\partial^2 \psi_L}{\partial t^2}(x, t) = (a^2 - b^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(L(x, t)) + 2(ac - bd) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t}(L(x, t)) + (c^2 - d^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(L(x, t)).$$

Queremos que ψ_L satisfaça a equação de onda. Ou seja, queremos que

$$\frac{\partial^2 \psi_L}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial^2 \psi_L}{\partial t^2}(x,t) = 0$$

para quaisquer x, t em $\mathbb{R}^2$. Para que isto ocorra, basta que as relações

$$a^2 - b^2 = 1$$

$$ac - bd = 0$$

e

$$c^2 - d^2 = -1$$

sejam cumpridas. Isto ocorre no caso da transformação de Lorentz

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}},$$

o que mostra que a equação de onda é invariante por transformações de Lorentz. Observe que isto não ocorre se tomarmos uma transformação de Galileu

$$x' = x - vt$$

$$t' = t$$

onde $v > 0$.

Referências

[1] Terek Couto, Ivo. Lymberopoulos, Alexandre. Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e Superfícies.

[2] Hoon Lee, Nam. Geometry: from Isometries to Special Relativity.

[3] L.Naber, Gregory. The Geometry of Minkoswki Spacetime: An Introduction to the Mathematics of the Special Theory of Relativity.

[4] E.Marsden, Jerrold. Tromba, Antony. Vector Calculus.

[5] Lourenço, Mary Lilian. Ulhoa Coelho, Flávio. Um Curso de Álgebra Linear.