Introdução a Física Matemática
Orbifolds, Grupóides e TQFTs

Rodolfo Cesar Macedo Soares
NUSP: 10298054

Sumário

1 Introdução

Este texto é parte da avaliação da disciplina MAT6019-*Introdução a Física Matemática* ministrada pelo Prof. Dr. Cristian Ortiz e tem como objetivo apresentar um pouco da teoria de Orbifolds no contexto topológico, como podemos fazer uma reinterpretação dessa teoria usando teoria de categorias e como isso se relaciona com numa abordagem bastante moderna para campos quânticos na física: A teoria chama de *Topological Quantum Field Theories* ou TQFTs.

Na primeira seção, falarei da abordagem topológica usando como referências [Thu02] e [Car22]. Nelas, os orbifolds surgem como uma “generalização” das variedades topológicas usuais, nelas, além do atlas, precisamos da informação de como quocientes local são construidos por ações de grupo. Conseguimos reconstruir a teoria de topologia algébrica e geometria diferencial com ideias que surgem da teoria de variedades, com o cuidado de também preservar essa estrutura de quociente local, porém com mais flexibilidade para deduzir outras propriedades.

Em segunda, farei um breve introdução sobre a teoria de categorias usando como referência o livro [Lan98] apresentando como as ideias de generalização e abstração que essa teoria cria. Em seguida, usando as ideias de [Moe02] mostrarei como conectar as construções anteriores com essa teoria.

Por fim, mostrarei como esses conceitos surgem em física nos TQFTs usando como referências [LU06] e [Ati88].

2 Orbifolds

2.1 Definição e exemplos:

Um orbifold é uma espécie de generalização de uma variedade topológica, focada especificamente em ações locais de grupos. A ideia, de forma é resumida, é: além de abertos que geram a topologia da variedade e as homeomorfismos que se comportam bem em relação a interseções desses abertos, associamos um grupo finito local a esses abertos e os homeomorfismos também se comportam como homomorfismos de grupos que atuam na interseção.

Esse objeto está intimamente relacionado com a noção de uma ação de grupo, relembrando:

Definição 2.1 (Ação de grupo)**.** Uma *ação de grupo* Γ num conjunto X é uma função $\mu : \Gamma \times X \to X$ onde $\mu(e, x) = x$ e $\mu(g, \mu(h, x)) = \mu(gh, x)$ para todo $x \in X$ e $g, h \in \Gamma$

Exemplo 2.1. Colocando $X = \mathbb{R}^3$ e $G = SO(3)$ o grupo de isometrias de $\mathbb{R}^3$ que preservam a orientação, temos a ação de grupo $\mu(A, x) = A.x$ correspondendo ao produto de matriz por vetor-coluna, que corresponde a como aplicar as isometrias na forma matricial em pontos do espaço.

Definição 2.2 (Orbifold)**.** Um *orbifold* O é definido como um espaço localmente Hausdorff X_O, denominado *espaço subjacente* com a seguinte estrutura adicional:

- X_O tem um recobrimento por por família de abertos U_i, fechado sobre interseções finitas.

- A cada um dos U_i está associado um grupo finito Γ_i, uma ação de grupos num aberto $\tilde{U}_i$ de R^n e homeomorfismo $\varphi_i : U_i \to \tilde{U}_i/\Gamma_i$.

- Sempre que $U_i \subset U_j$, existe homomorfismo injetivo $f_{ij} : \Gamma_i \hookrightarrow \Gamma_j$ e um mergulho $\tilde{\varphi_{ij}} : \tilde{U}_i \subset \tilde{U}_j$ que seja equivariante com respeito a f_{ij}:

  $$\tilde{\varphi_{ij}}(\gamma x) = f_{ij}(\gamma)\tilde{\varphi_{ij}}(x)$$

  de forma que o seguinte diagrama comute:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{U_i} \arrow[r, "\widetilde{\varphi_{ij}}"] \arrow[d, "\pi_i"'] & \widetilde{U_j} \arrow[d, "\pi_j"] \\
\widetilde{U_i}/\Gamma_i \arrow[r, "\varphi_{ij}"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & \widetilde{U_j}/\Gamma_j \arrow[d, "\varphi_j"] \\
U_i \arrow[r, hook] & U_j
\end{tikzcd}$$

  onde π_i e π_j são as aplicações quociente por Γ_i e Γ_j, respectivamente.

Denotamos por $(U_i, \varphi_i, \Gamma_i)_i$ o atlas orbifold associado e, como no caso de variedades topológicas, está associado à este uma *estrutura orbifold* (o atlas maximal). Assim, o orbifold fica definido a menos de equivalências de estruturas orbifold.

Observação. Em essência, a última propriedade da estrutura mostra que cada aberto tem grupo associado e que em interseções (ou inclusões) de abertos esses grupos se comunicam bem, ou seja, são equivariantes em relação ao homeomorfismo que preserva a informação de como o quociente atua nesses abertos.

Como exemplo mais simples de orbifold, seja M variedade topológica com atlas $(U_i, \varphi_i)_i$, se a cada par associarmos o grupo trivial $\Gamma = \{e\}$ teremos atlas que satisfaz as condições anteriores e, portanto, é um orbifold.

Na verdade, conseguimos uma gama vasta de exemplos estudando ações de grupos em variedades. Primeiro, uma definição:

Definição 2.3 (Ação propriamente descontínua)**.** Dado X um espaço topológico e Γ um grupo, a ação do grupo Γ é *propriamente descontínua* se para todo $K \subset X$ compacto o conjunto $\{g \in \Gamma : gK \cap K \neq \emptyset\}$ é finito.

Observação. É bastante importante notar que a definição de propriamente descontínua aqui não implica que a ação seja livre (o conjunto especificado teria somente e como elemento) utilizada em outras áreas.

Definição 2.4 (Grupo de isotropia de um ponto)**.** Seja ação de grupo $\Gamma \times X \to X$. Para cada $x \in X$, o *grupo de isotropia de* x é dado por $\{g \in \Gamma : gx = x\}$.

Proposição 2.1. *Se M é variedade em Γ é grupo agindo propriamente descontinuamente em M, então M/Γ tem estrutura orbifold.*

Esboço da demonstração. Para cada ponto de $x \in M/\Gamma$, podemos escolher $\tilde{x} \in M$ que projeta a x. Seja I_x o grupo de isotropia de $\tilde{x}$, existe vizinhança $\tilde{U_x}$ invariante por esse grupo e disjunta das imagens de $\Gamma \setminus I_x$, essa vizinhança será nossa escolha de abertos. Para garantir cobertura de toda a variedade, preenchemos os abertos com todas as interseções finitas possíveis entre abertos.

Sempre que as interseções não forem vazias, conseguimos elementos de Γ tal que, quando aplicadas no levantamento, elas se intersectam e aplicando elementos do grupo de isotropia fixados de cada aberto como escolhido no começo teremos que as condições pedidas pela definição serão satisfeitas.

Essa proposição nos dá que os orbifolds são muito mais flexíveis em relação a quocientes. De fato, existem quocientes M/G que não são variedade, mas sempre serão orbifolds.

Exemplo 2.2 (Mesa de Bilhar)**.** Considerando o conjunto $M = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^2$, e quatro retas que formem os lados de um retângulo R, para Γ consideramos o grupo gerado pelas reflexões euclidianas em torno dessas retas, tal grupo é isomorfo a $(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2) \times (\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2)$ (onde $*$ representa o produto livre e $\times$ representa o produto direto).

A ação é propriamente descontínua e seu quociente pode ser interpretado como conjunto R, e a ação faz com que podemos interpretar o espaço como uma mesa de bilhar: observando o quociente (a mesa) por qualquer um dos lados temos simetria em relação as laterais do que ocorre no centro, daí o nome.

Exemplo 2.3 (Cones)**.** Seja $M = D^2$, o disco unitário em $\mathbb{R}^2$, e $\Gamma = \mathbb{Z}_n$ com n um inteiro positivo qualquer. Γ age em M como rotação de ângulo $2\pi/n$ em torno da origem. Pelo grupo ser finito, ele age propriamente descontinuamente e o seu quociente é um cone de ângulo cônico $2\pi/n$.

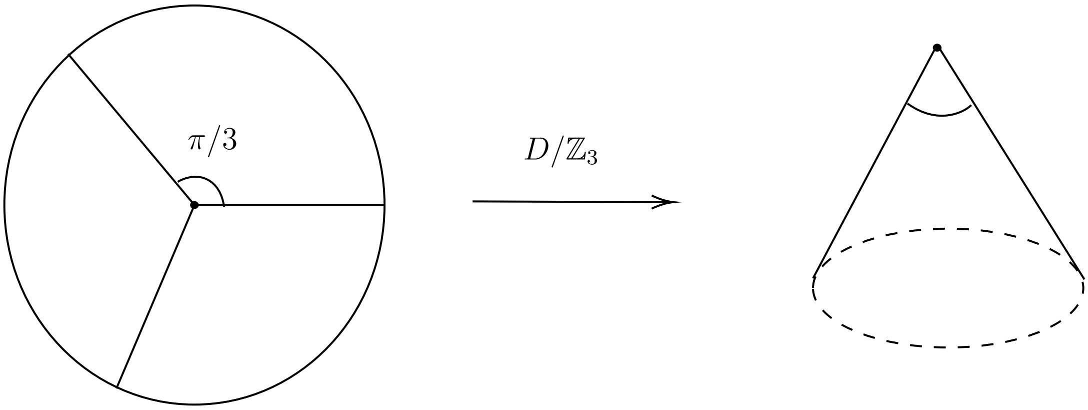

Figura 1: Exemplo do Cone gerado pelo quociente por $\mathbb{Z}_3$

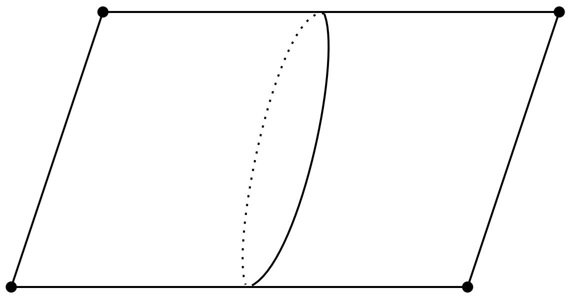

Figura 2: Orbifold Pillowcase

Exemplo 2.4 (Travesseiro (Pillowcase))**.** Considerando em $\mathbb{R}^2$ o grupo discreto G gerado por rotações de ordem 2 em torno do reticulado $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$. Para visualizar esse quociente, pensando $Q = [-1/2, 3/2] \times [0, 1]$, assim, temos dois pontos do reticulado na parte de cima e na de baixo do polígono. A ideia é colar os lados verticais (pela composição das rotações) chegando num cilindro, daí fechamos os lados abertos (usando também as rotações) e daí temos uma esfera com quatro pontos cônicos.

Para exemplificar que existem orbifolds que não são variedades, mostrando que esse novo objeto efetivamente é um generalização não trivial do anterior, precisamos de um resultado preliminar:

Proposição 2.2. *Seja M uma n-variedade conexa e conexa por caminhos com $n >= 3$. Se $p \in M$ e $\pi_1(X)$ corresponde ao grupo fundamental da variedade X, então $\pi_1(M) \equiv \pi_1(M \setminus \{p\})$.*

A demonstração dessa afirmação é uma aplicação direta do *Teorema de*

Seifert-van Kampen de topologia algébrica aliado ao fato que S^n, com $n >= 2$, é contrátil.

Exemplo 2.5 (Orbifold que não é variedade)**.** Considerando $M = \mathbb{R}^3$ e $\Gamma =< -\mathrm{Id} >$ agindo como a reflexão em torno do plano-xy. O orbifold resultante é um cone topológico sobre $\mathbb{R}P^2$ e é variedade contrátil, pela afirmação anterior, removendo o vértice cônico teríamos o mesmo grupo fundamental trivial. Porém, ao removermos esse ponto, temos espaço homeomorfo ao próprio $\mathbb{R}P^2$ que não tem grupo fundamental trivial. Logo, M/Γ não pode ser variedade.

2.2 O grupo fundamental e espaços de recobrimento

Pensando nos orbifolds como essa estrutura topológica generalizada, é natural perguntar se podemos ou não transportar as construções usuais como grupo fundamental, espaços de recobrimento, homologia, métricas riemannianas etc. A resposta é afirmativa, desde que, quando fizermos as novas definições, tomemos cuidado para que as construções se comuniquem de forma adequada com a estrutura de grupo. Apresentando de forma rápida como fazer isso para os dois primeiros:

Para os grupos fundamentais, vamos permitir que os loops possam "saltar" pela ação do grupo local finito. Precisamos de duas definições:

Definição 2.5 (Pseudogrupo)**.** Seja M uma variedade, um pseudogrupo $\mathscr{G}$ é um conjunto de homeomorfismos $h : U \to V$ com U e V abertos de M tais que:

- Os domínios de $\mathscr{G}$ cobrem M.
- Se $g \in \mathscr{G}$ então sua inversa $g^{-1} \in \mathscr{G}$.
- Se $g \in \mathscr{G}$ e $U' \subset U$ então $g|_{U'} \in \mathscr{G}$.
- Se $g_1, g_2 \in \mathscr{G}$, então $g_2 \circ g_1 \in \mathscr{G}$ onde essa composição fizer sentido.
- Pertencimento a $\mathscr{G}$ é *propriedade local*, ou seja, se $g : U \to V$ e U pode ser coberta por união de abertos U_α de forma que todos os $g|_{U_\alpha} \in \mathscr{G}$ então, $g \in \mathscr{G}$.

Evidentemente, poderíamos pensar em subgrupos de difeomorfismos numa variedade suave.

Denominamos $\mathscr{G}$-órbita de x os pontos que são imagem de x por algum elemento de $\mathscr{G}$ e denotamos $\mathscr{G}$.

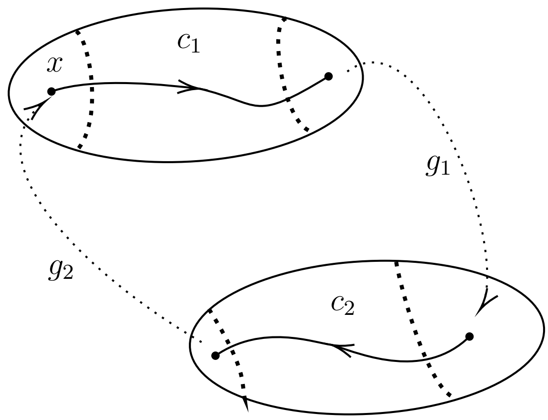

Figura 3: Diagrama de como um $\mathscr{G}$-loop funciona

Definição 2.6 ($\mathscr{G}$-loop)**.** Seja $\mathscr{G}$ um pseudogrupo em M. Um $\mathscr{G}$-loop com ponto base $x \in M$ consiste de:

1. Uma sequência $0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$.
2. Um caminho contínuo $c_i : [t_{i-1}, t_i] \to M$ para cada $1 \leq i < n$.
3. Um elemento $g_i \in \mathscr{G}$ definido em vizinhança de $c_i(t_i)$ para cada i tal que $g_i \circ c_i(t_i) = c_{i+1}(t_i)$ para cada $1 \leq i \leq n-1$ e $c_1(0) = h_n \circ c_n(1) = x$

A terceira propriedade descrita é, justamente, a que flexibiliza a definição no caso de orbifolds. Ela permite que um loop seja construído pela colagem das extremidades de caminhos contínuos pela ação do pseudogrupo $\mathscr{G}$. No figura, 3 temos uma diagrama de como essa ideia funciona, se existe uma relação entre pedaços de abertos por um elemento do grupo local, o loop pode saltar.

Poderíamos fazer *subdivisões* de $\mathscr{G}$-loops adicionando pontos na sequência $(t_n)_n$, restringindo os caminhos aos novos intervalos definidos e tomando $g = Id$ nas novas extremidades construídas.

Lembrando da construção usual de $\pi_1(M)$ precisamos de alguma relação de equivalência, aliada a operação de composição, para termos classes de homotopia de $\mathscr{G}$-loops:

Definição 2.7 (Deformações e equivalências de $\mathscr{G}$-loops)**.** Uma *deformação* de um $\mathscr{G}$-loop (g_i, c_i) consiste de homotopias dos caminhos c_i^s de tal forma que (g_i, c_i^s) é $\mathscr{G}$-loop em x para cada $S \in [0, 1]$.

Dois $\mathscr{G}$-loops são ditos *equivalentes* se admitem subdivisões (g_i, c_i) e (g_i', c_i') tais que, para cada i exista $h_i \in \mathscr{G}$ definido em vizinhança de c_i que satisfazem:

- $h_1 = \mathrm{Id}$ e $h_i \circ c_i = c_i'$.
- $g_i' \circ h_i$ e $h_{i+1} \circ h_i$ possuem o mesmo germe em $c_i(t_i)$ para $1 \leq i \leq n-1$
- $g_n' \circ h_n$ e g_n tem o mesmo germe em $c_n(1)$.

Dois $\mathscr{G}$-loops estão na mesma classe de homotopia se um pode ser obtido do outro por número finito de subdivisões, equivalências e deformações. O conjunto dessas classes munido com a operação de concatenação de loops forma um grupo, denotado $\pi_1(\mathscr{G}, x)$.

No caso do quociente $M/\mathscr{G}$ ser conexo, existe isomorfismo $\pi_1(\mathscr{G}, x) \simeq \pi_1(\mathscr{G}, y)$ para quaisquer $x, y \in M$.

Nas definições feitas aqui, ainda não fizemos menção de orbifolds, mas podemos inserir essa noção de maneira natural usando o pseudogrupo induzido pela construção.

Definição 2.8 (Grupo Fundamental Orbifold)**.** Seja $\mathscr{O}$ um orbifold e seja $A = \{(\tilde{U}_i, H_i, \phi_i)\}$ um atlas fixado, definimos:

$$U_A := \bigsqcup \tilde{U}_i \text{ and } \phi := \bigsqcup \phi_i : U_A \to |\mathscr{O}|$$

ou seja, $x \in \tilde{U}_i \subset U_A$ implica $\phi(x) = \phi_i(x)$.

As funções $h : V \to W$, com $V, W \subset U_A$ abertos que satisfazem

$$\phi \circ h = \phi|_V$$

geram pseudogrupo $\mathscr{G}_A$ de difeomorfismos locais de U_A.

Seja *abs*$\mathscr{O}$ o espaço subjacente do orbifold, o *grupo fundamental* de $\mathscr{O}$ baseado em $x \in |\mathscr{O}|$ é definido como

$$\pi_1^{\mathrm{orb}} := \pi_1(\mathscr{G}_A, \tilde{x})$$

onde $\tilde{x} \in U_{\mathscr{O}}$ com $\phi(\tilde{x}) = x$.

Definição 2.9 (Recobrimento Orbifold)**.** Um *recobrimento orbifold* de um orbifold O é um orbifold $\tilde{O}$ com um projeção $p : X \to X_O$ entre os espaços subjacentes, de tal forma que cada ponto $x \in X_O$ existe vizinhança $U = \tilde{U}/\Gamma$ (onde $\tilde{U}$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$, onde toda componente v_i de $p^{-1}(U)$ é isomórfica a $\tilde{U}/\Gamma_i$, onde $\Gamma_i \subset \Gamma$ é subgrupo e tal isomorfismo deve respeitar as projeções.

Uma observação importante é que o espaço subjacente $X_{\tilde{O}}$ não é, necessariamente, recobrimento de X_O. Um exemplo básico é seja M uma variedade e Γ grupo agindo propriamente descontinuamente em M, então M é recobrimento orbifold de M/Γ.

Dizemos que um orbifold é *bom*, se possui algum recobrimento orbifold que seja uma variedade. Dizemos que o orbifold é *ruim* caso contrário. A partir desse ponto, sempre que for mencionado um recobrimento será um recobrimento orbifold.

Voltando a ideia de generalização de variedades, Thurston prova o seguinte resultado [Thu02]:

Proposição 2.3 (Existência do recobrimento universal). *Um orbifold possui um recobrimento universal $\tilde{O}$. Em outras palavras, para qualquer outro recobrimento $\tilde{O}'$ existe levantamento $q : \tilde{O} \to \tilde{O}'$ (respeitando os pontos base).*

A ideia dessa prova é novamente, voltar a construção de variedades e adaptar a prova para que as novas estruturas que surgem da estrutura de orbifold sejam preservadas.

Como no caso de variedades, podemos pensar no grupo fundamento orbifold $\pi_1(O)$ como o grupo dos automorfismos do recobrimento universal $\tilde{O}$. Um estudo um pouco mais detalhado consegue encontrar dualidades bastante similares às encontradas em topologia algébrica de variedades.

3 Orbifolds como Grupóides

3.1 Breve introdução sobre teoria de categorias

A ideia da categoria e abstrair mais os sistemas matemáticos, no princípio que que as propriedades podem ser unificadas e simplificadas quando observamos como representação por diagramas de flechas.

Diversas propriedades podem ser representadas por propriedades universais de diagramas, por exemplo:

Exemplo 3.1 (Funções em produtos cartesianos)**.** Sejam X e Y conjuntos, $X \times Y$ seu produto cartesiano, f e g as projeções em X e Y respectivamente. Qualquer função $h : X \to Y$ pode ser unicamente determinada pelas composições $p \circ h$ e $g \circ h$. Isso equivale a dizer que, no seguinte diagrama, existe única h que faz o diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & X \times Y \arrow[l, "p"] \arrow[r, "q"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Esses conceitos permitem que o estudo de um objeto, ou sistema matemático, tenha foto intrínseco em como “as coisas” se relacionam permitindo que diferentes áreas da matemática sejam comparáveis nesse sentido.

Cada vez mais essa teoria torna-se comum na matemática contemporânea, justificando uma seção para definir e apresentar exemplos com algum cuidado, mesmo que de forma rápida.

3.2 Definições e Exemplos:

Definição 3.1 (Categoria)**.** Uma *categoria* $\mathfrak{C}$ consiste de:

- Um conjunto $\mathfrak{C}_0$ de *objetos*;
- Um conjunto $\mathfrak{C}_1$ cujos elementos são denominados *flechas*: Sejam A, B objetos, uma flecha f relaciona esses objetos: $A \to B$.
- Funções $s, t : \mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{C}_0$ que relacionam a cada flecha seu objeto de origem e de chegada respectivamente. O conjunto $\mathfrak{C}_1(A, B)$ corresponde as flechas com origem A e alvo B.

- Função *identidade* $i : \mathfrak{C}_0 \to \mathfrak{C}_1$ que associa a cada objeto A a flecha $A \to A$;

- Função *composição* $m : \mathfrak{C}_1(A, B) \times \mathfrak{C}_1(B, C) \to \mathfrak{C}_1(A, C)$ que realiza a composição de flechas satisfazendo as propriedades de associatividade e unidade em relação as flechas que são imagem da função i

Observação. Estritamente, o objeto descrito na definição é uma *metacategoria*, e denominamos por categoria qualquer realização de uma metacategoria, ou seja, $\mathfrak{C}_0$ e $\mathfrak{C}_1$ não são conjuntos abstratos, ver [Lan98]. Nesse texto, não será necessario diferenciar esses conceitos.

As flechas de uma categoria também são denominados de *morfismos* da categoria. Se, em $\mathfrak{C}_1$, toda flecha possui inversa, dizemos que a categoria é um *grupóide*.

Exemplo 3.2. Alguns exemplos de categorias:

- Conjuntos: Denotada por **Set**, cujos objetos são os conjuntos e os morfismos são as funções entre conjuntos.

- Espaços Topológicos: Denotada por **Top**, cujos objetos são espaços topológicos e os morfismos são as funções contínuas entre eles. Também podemos estudar pensando em outros morfismos: **Toph** onde os morfismos são as classes de homotopia de mapas e **Tops** onde os morfismos são os mapas que preservam um ponto base fixado.

- Grupo: Todo grupo pode ser representado como categoria, onde o único objeto é o grupo e os morfismos são as flechas que correspondem a multiplicação por elementos do grupo. Notando que todo morfismo tem inversa pela definição de grupo.

- Categoria dos grupos: Denotada por **Grp**, os morfismos são os homomorfismos de grupos.

- Grupos abelianos: Denotado por **Ab** e os morfismos são os homomorfismos.

Definição 3.2 (Funtor)**.** Um *funtor* é um morfismo de categorias. Especificamente, sejam $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{B}$ categorias, um funtor $T : \mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$ é constituído de duas funções $\mathfrak{C}_0 \to \mathfrak{B}_0$ e $\mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{B}_1$ que preservam as unidades (flechas $A \to A$) e a composição de flechas.

Um funtor é dito um *isomorfismo* de categorias quando ambas as funções descritas são bijeções.

Temos excelente exemplo mostrando essas ideias em ação que inclusive foi uma das motivações para a construção dessa teoria:

Exemplo 3.3 (Topologia Algébrica)**.** A ideia central de topologia algébrica é associar aos espaços topológicos a objetos algébricos que são invariantes desses espaços topológicos.

Pensando no invariante da homologia singular, a cada espaço topológico X e cada n inteiro positivos conseguimos associar grupo abeliano $H_n(X)$, o n-ésimo grupo de homologia de X, e toda função contínua $f : X \to Y$ que relaciona espaços topológicos corresponde à um homomorfismo induzido $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Y)$. Então, a homologia relaciona setas e objetos das categorias **Top** e **Ab** e temos o funtor $H_n : \mathbf{Top} \to \mathbf{Ab}$.

Para o grupo fundamental, temos ideia similar: A cada espaço topológico, com algum ponto base fixado, conseguimos associar o grupo de classes de homotopia $\pi_1(X)$ e funções contínuas também induzem homomorfismos nos grupos fundamentais. Concluímos que $\pi_1 : \mathbf{Tops} \to \mathbf{Grp}$ é um funtor.

Dada categoria $\mathfrak{C}$, podemos munir os conjuntos de setas e flechas com conceitos topológicos. Temos então a definição:

Definição 3.3 (Grupoide de Lie)**.** Um *grupoide de Lie* é um grupoide $\mathfrak{C}$ em que os conjuntos $\mathfrak{C}_0$ e $\mathfrak{C}_1$ são variedades suaves Hausdorff e as funções estruturais da definição de categoria são suaves. Um *funtor* entre grupoides de Lie será funtor $T : \mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$ onde as funções flecha e objeto são suaves.

Exemplo 3.4. Alguns exemplos:

- Toda variedade suave M pode ser interpretada como grupoide de Lie $\mathfrak{C}$ colocando $\mathfrak{C}_0 = M = \mathfrak{C}_1$, onde todas as flechas serão unidades, denominado $u(M)$.

- Supondo que um grupo de Lie K age suavemente numa variedade M pela esquerda. Podemos definir grupoide de Lie $K \ltimes M$ com os objetos sendo os pontos $x \in M$ e as flechas $k : x \to y$ onde $k.x = y$. Daí, $(K \ltimes M)_0 = M$ e $(K \ltimes M)_1 = K \ltimes M$. Esse grupoide é chamado de *grupoide translação* ou *grupoide ação.*

Um isomorfismo é uma equivalência muito forte de categorias, essencialmente dizendo que as categorias são iguais. Em muitos casos, temos interesse em equivalências mais fracas que preservam as propriedades que são essenciais no contexto. Nos assuntos tratados nesse texto, a equivalência utilizada é a *equivalência de Morita.*

Definição 3.4 (Equivalência de Morita)**.** Um funtor entre grupoides $\Psi : H \to G$ é dito *Morita* se o seguinte diagrama comuta, onde s e t são os mapas origem e alvo da estrutura de categoria:

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "\Psi_1"] \arrow[d, "(s,t)"'] & G_1 \arrow[d, "(s,t)"] \\ H_0 \times H_0 \arrow[r, "\Psi_0 \times \Psi_0"'] & G_0 \times G_0 \end{tikzcd}$$

Dois grupoides G e H são *Morita* equivalentes se existe outro grupoide K com funtores Morita tal que: $H \overset{\simeq}{\leftarrow} K \overset{\simeq}{\rightarrow} G$

3.3 Voltando aos Orbifolds

Os orbifolds serão interpretados como classes de equivalência da seguinte estrutura:

Definição 3.5 (Grupoide orbifold)**.** Seja G um grupoide de Lie e dado $x \in G_0$, seja G_x o conjunto de todas as flechas cuja origem e alvo são o objeto x, ele é denominado *conjunto de isotropia de x*. Dizemos que G é um *grupoide orbifold* quando:

- O mapa $(s,t) : G_1 \to G_0 \times G_0$ que associa cada flecha ao par correspondente a seu objeto de origem e alvo é próprio.
- Para todo $x \in G_0$, o conjunto G_x é discreto.

Em particular, quando um grupoide satisfaz a segunda propriedade ele é denominado *grupoide de folheação*.

Definição 3.6 (Estrutura Orbifold)**.** Denotando por $|G|$ o espaço de orbitas G_0/G_1 de um grupoide. Se X é espaço Hausdorff localmente compacto, uma *estrutura orbifold* de X é representada por grupoide orbifold G e homeomorfismo $f : |G| \to X$.

Se $\phi : H \to G$ é equivalência como na definição 3.4, então $|\phi| : |H| \to |G|$ é homeomorfismo e a composição

$$f \circ |\phi| : |H| \to |G| \to X$$

é definida como estrutura orbifold equivalente em X.

Daí um *orbifold* é determinado pelo grupoide orbifold e pela classe de equivlência de estrutura orbifold associada a ele.

O leitor pode notar que tanto na definição topológica anterior quanto nessa, temos um objeto com uma estrutura associada e nesse ponto as ideias não são tão distintas. A grande diferença nas situações é que no primeiro construímos o orbifold observando características locais do objeto que queremos estudar: cartas, homeomorfismos/homomorfismos locais, grupo local, atlas orbifold, etc. Já no segundo, o orbifold é construído sem olhar para essas propriedades locais, somente como as setas se relacionam dando mais generalidade para essa estrutura.

Exemplo 3.5 (Voltando as cones)**.** Colocando $G_0 = D^2 \subset \mathbb{R}^2$ o disco unitário e G_1 com elementos da forma $(p, g) \in D^2 \times Z_n$ com n inteiro positivo. Essas flechas relacionam os elementos da seguinte forma:

$$p \xrightarrow{(p,g)} gp$$

Com a seguinte regra de composição:

$$(p, g) \circ (gp, h) = (p, gh)$$

É direto que satisfaz as propriedades de grupoide orbifold e existe mapa ϕ do espaço de órbitas ao cone descrito anteriormente.

Exemplo 3.6 (Representações alternativas)**.** Mais geralmente, seja M uma variedade suave e G um subgrupo finito de difeomorfismos de M. Dizemos que o orbifold $[M/G]$ é a classe de equivalência do grupoide X com objetos $m \in M$ e flechas $(m, g) \in M \times G$.

Podemos definir outro grupoide representando o mesmo orbifold da seguinte forma. Seja $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta contrátil de M tal que todas as interseções finitas desses abertos sejam contrateis ou vazios e com a propriedade: para todo $g \in G$ e qualquer $i \in I$ existe $j \in I$ de forma que $g(U_i) = U_j$. Seja G_0 a união disjunta dos U_i com

$$G_0 \xrightarrow{\rho} M$$

o mapa natural. Tomando G_1 construído pelo quadrado pullback:

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, "\Psi_1"] \arrow[d] & M \times G \arrow[d, "s \times t"] \\
G_0 \times G_0 \arrow[r, "\rho \times \rho"] & M \times M
\end{tikzcd}$$

onde $s(m,g) = m$ e $t(m,g) = mg$. Pela construção do grupoide G, podemos pensar em G_1 como a união disjunta de todas as interseções de dois conjuntos da base dada vezes o grupo G:

$$G_1 = \left(\bigsqcup_{(i,j) \in I \times I} U_i \cap U_j \right) \times G$$

onde as flechas em $U_i \cap U_j \times \{g\}$ começam em U_i e terminam em gU_j. A construção faz com que seja Morita equivalente a X.

4 TQFTs

4.1 Introdução

Recentemente, surgiram avanços nas conexões entre *física quântica* e *topologia*, depois de uma era muito frutífera de estudos relacionando geometria e física. Agora, o aspecto global das construções tem caráter principal na descrição de fenômenos.

Tomando a intuição da física e os recursos da topologia, é possível fazer conjecturas e chegar em resultados inteligentes, sendo uma boa parte deles estabelecida formalmente por métodos alternativos. Ainda assim, poderíamos usar as teorias físicas como ferramentas conceituais para sugerir novos resultados matemáticos, talvez não seja por acaso que essas teorias de campos quânticos podem ser renormalizadas em dimensões n (espaço-tempo) $n \leq 4$ e são nesses casos que situações complicadas surgem, como por exemplo os trabalhos de Thurston para a geometrização de 3-variedades.

4.2 Definição de TQFTs

Seguindo o apresentado por [LU06], para exprimir essa teoria da seguinte definição:

Definição 4.1 (Cobordismos)**.** Sejam W uma variedade suave $(n+1)$ dimensional com bordo, M e N são n variedades suaves e mergulhos $i : M \to \partial M$, $j : N \to \partial N$ com imagens disjuntas, tal que $\partial W = i(M) \sqcup j(N)$. Então., denotamos por *cobordismo* $(n+1)$ dimensional a uma quíntupla ordenada (W, M, N, i, j).

A ideia por trás do cobordismo é construir uma variedade de dimensão maior, "colando" de forma adequada uma na outra, de forma que as originais sejam fronteira da original. Na figura 4, temos um exemplo de como construir o par de calças pelo cobordismo entre círculos.

A inserção desse conceito se dá pelo fato de que a interação de cordas precisa de mais dimensões para funcionar. De maneira bastante informal, a corda precisa de mais dimensões do que a partícula para a descrição de fenômenos físicos daí a interação entre diferentes cordas precisa ter ainda mais informação, i.e., mais dimensões.

Definição 4.2 (TQFTs)**.** Uma *topological quantum field theory* (TQFT) $(n+1)$ dimensional é um funtor H da categoria das variedades suaves e difeomorfismos que associa a cada cobordismo (Y, M, N, i, j), onde M e N são variedades com $\dim M = \dim N = n$ uma função linear $\Psi_Y : H(M) \to H(N)$

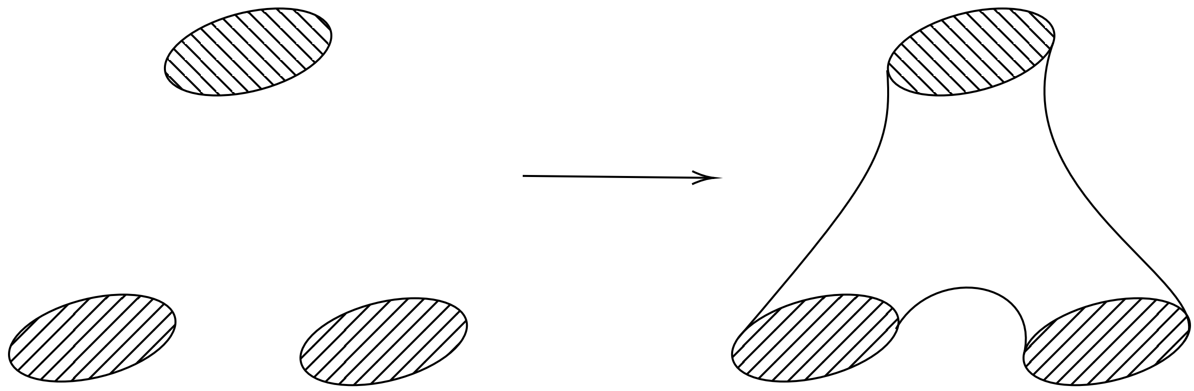

Figura 4: Cobordismo do par de calças

onde H e Ψ respeitas as estruturas básicas e a colagem do cobordismo. Se a variedade Y não tem fronteira, $\Psi_Y : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é associado um número $Z(Y)$.

Numa dessas construções podemos definir os *campos* que serão os objetos de estudo em cima da estrutura apresentada e tentar deduzir como tais objetos devem se comportar, daí justificando o nome de "teoria de campos".

4.3 Orbifold TQFTs

Fechando e conectando todas essas ideias temos a *Orbifold string topology.* Fixando um orbifold compacto orientado X, essa é uma *topological quantum field theory* de dimensão $(1 + 1)$, cujos campos são descritos:

$$\mathscr{F}(Y) = \mathrm{Map}(Y, X)$$

o espaço de moduli de todos os morfismos orbifolds de Y até X.

A topologia *string* do espaço de loops (mapas $S^1 \to X$) é construida usando correspondências de orbifolds.

Essa teoria é explorada por Lupercio, Uribe, Xicoténcatl no artigo *Orbifold String Topology* e surgem como generalização das construções de Chas-Sullivan sobre produtos string em variedades.

4.4 Considerações Finais

O objetivo desse texto era somente fazer uma (muito) breve exposição sobre um tópico relativamente recente no estudo de geometria, como ele passa pelo processo de abstração permitido por teoria de categorias e como esses assuntos surgem numa área muito ativa e recente de física, colocar mais detalhes de cada uma delas começaria a pedir um pouco mais de detalhe na exposição e o espaço é limitado.

Dito isso, cada um desses três pontos abordados ainda recebe bastante atenção como sua própria área de estudo que pode ser aprofundada de diversas maneiras e que podem servir como ferramentas em outras áreas de matemática (como os orbifolds na teoria de sistemas dinâmicos em variedades) e de física.

Referências

[Ati88] Michael F. Atiyah. Topological quantum field theory. *Publications mathématiques de l'I.H.É.S*, 68:175–186, 1988.

[Car22] Francis C. Caramello Jr. Introduction to orbifolds. 2022. [Online, Acessado em: 30-Set-2022].

[Lan98] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician.* Springer-Verlag, 1998.

[LU06] Ernesto Lupercio and Bernardo Uribe. Topological quantum field theories, strings and orbifolds. *Contemporary Mathematics*, 2006. [Online; Acessado em: 24-Set-2022].

[Moe02] Ieke Moerdijk. Orbifolds as grupoids: an introduction. 2002. [Online, Acessado em: 14-Oct-2022].

[Thu02] William Paul Thurston. *Geometry and Topology of 3-manifolds.* MSRI Publications, 2002. [Online, Acessado em: 10-Set-2022].