Como fazer álgebra com análise?

Thiago, Thiago & Thiago

Março de 2021

Conteúdos

Funções Periódicas (Complexas)

- Exemplos Clássicos

$$\operatorname{sen} 2\pi\theta \text{ e } \cos 2\pi\theta$$

- Exemplo Fundamental

$$e^{2\pi i\theta} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

- As funções z^n são os geradores de funções em $\mathbb{C}^\times$
- As funções $e^{2\pi in}$ são os geradores funções em $\mathbb{S}^1$

Teorema (Convergência de Fourier)
Seja $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função de classe C^1. Então existem $a_n \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi in\theta}$$

- Em $C^1(\mathbb{S}^1)$, temos um produto interno bem canônico

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(\theta)\overline{g(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

Lema (Ortogonalidade dos Caráteres Baby)
As funções exponenciais satisfazem

$$\langle e_n, e_m\rangle = \begin{cases} 1 \text{ se } n = m \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Assim, o coeficiente de Fourier a_n pode ser calculado como

$$a_n = \widehat{f}(n) := \langle f, e_n\rangle$$

Funções Não-periódicas

- Todas as funções anteriores + algumas outras!
- Não temos mais a necessidade de $f(0) = f(1)$
- Adicionar $e_x(t) = e^{2\pi ixt}$ para todo $x \in \mathbb{R}$
- Analogia:

$\mathbb{S}^1$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$
$\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(\theta)e^{-2\pi in\theta}\ \mathrm{d}\theta$	$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi ixt}\ \mathrm{d}t$
$f(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{2\pi in\theta}$	$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x)e^{2\pi ixt}\ \mathrm{d}x$

Grupos Topológicos

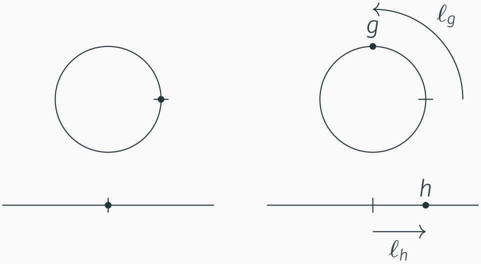
- Grupo Topológicos = Grupos + Topologia
- $\mathsf{GrpTop} = \mathsf{Grp}(\mathsf{Top})$

$$\begin{tikzcd} \mathsf{GrpTop} \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Grp} \arrow[d] \\ \mathsf{Top} \arrow[r] & \mathsf{Set} \end{tikzcd}$$

- Dado $g \in G$,

$$g \rightsquigarrow \ell_g(h) = gh$$
$$g \rightsquigarrow \mathfrak{r}_g(h) = hg$$

- Como $\ell_g \ell_h = \ell_{gh}$ e $\mathfrak{r}_g \mathfrak{r}_h = \mathfrak{r}_{hg}$ temos que cada uma dessas é um homeomorfismo



Exemplos

- Qualquer grupo G com a topologia discreta
- Os grupos de Lie
  - $\mathbb{R}^n$
  - $\mathbb{S}^1 \cong {}^{\mathbb{R}}/_{\mathbb{Z}}$
  - $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$
  - $\mathbb{R}^\times$ e $\mathbb{C}^\times$
  - $\mathrm{O}(n)$
  - $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$...
- Grupos de origem aritmética
  - $\mathbb{Z}_p$
  - $\mathbb{Q}_p$
  - $\mathrm{Gal}({}^{L}/_{K})$...
- Exemplos do Mezzo
  - Espaços vetoriais topológicos

Integrando em Grupos

- Todo grupo localmente compacto admite uma *medida de Haar*
- Uma noção de volume que é invariante por translação à esquerda ou à direita
- Em geral elas não concordam
- Única a menos de escalar

$$\begin{array}{rcl} G \text{ discreto} & \rightsquigarrow & \text{Medida de contagem} \\ \mathbb{R}^n & \rightsquigarrow & \text{Medida usual} \\ \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1 & \rightsquigarrow & \text{Produto da medida angular} \\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \rightsquigarrow & \lambda/_{\det} \end{array}$$

O Grupo de Caracteres

$$\begin{aligned} \widehat{f} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i x t} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

- Queremos entender o tal do $e^{-2\pi i x t}$

$$\begin{aligned} \chi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ t &\longmapsto e^{2\pi i x t} \end{aligned}$$

- $\chi \in \mathsf{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{S}^1)$ em GrpTop

- Como $\mathbb{R}$ é o recobrimento universal de $\mathbb{S}^1$,

$$\mathsf{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{S}^1) = \{t \longmapsto e^{2\pi i x t} : x \in \mathbb{R}\}$$

O Grupo de Caracteres

$$\begin{aligned} \widehat{f} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i x t} \mathrm{d}t \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} \widehat{f} : \mathsf{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{S}^1) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \chi &\longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\chi(t)} \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

- Se G é um grupo topológico consideremos $\widehat{G} = \mathsf{Hom}(G, \mathbb{S}^1)$
- Definimos
$$(\chi_1 \cdot \chi_2)(g) = \chi_1(g) \cdot \chi_2(g)$$
- Podemos munir $\widehat{G}$ com a topologia de convergência uniforme em subconjuntos compactos
- Se G é abeliano e localmente compacto então $\widehat{G}$ é abeliano e localmente compacto
- Se G é abeliano então $\widehat{G}$ é precisamente o espaço dos caracteres
$$\chi : G \longrightarrow \mathsf{U}(1) = \mathbb{S}^1$$
das G-representações contínuas, unitárias e irredutíveis

Exemplos Preliminares

- $\widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$
- $\chi \colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \rightsquigarrow \widetilde{\chi} \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fixando 0 e

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_1 : \widehat{\mathbb{S}^1} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \chi &\longmapsto \widetilde{\chi}(1) \end{aligned}$$

  dá uma bijeção
- $\widehat{\mathbb{S}^1} \cong \mathbb{Z}$
- Como $\mathbb{Z}$ é discreto e tem um único gerador, $\widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{S}^1$

$$\mathbb{R} \cong \widehat{\widehat{\mathbb{R}}} \qquad \mathbb{Z} \cong \widehat{\widehat{\mathbb{Z}}} \qquad \mathbb{S}^1 \cong \widehat{\widehat{\mathbb{S}^1}}$$

- Quando $G \cong \widehat{\widehat{G}}$?
- $\mathbf{Hom}(G, \mathbb{S}^1)$ é sempre abeliano
- Se $G \cong \widehat{\widehat{G}}$ então G é abeliano
- Qualquer grupo abeliano? $\widehat{\mathbb{Q}} \cong \widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$, mas $\widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R} \ncong \mathbb{Q}$
- Abelianos e compactos? Muito restritivo!

Teorema (Dualidade de Pontryagin)
Se G é abeliano e localmente compacto então

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow \widehat{\widehat{G}} \\ g &\longmapsto \varphi(g) : \begin{aligned}[t] \widehat{G} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ \chi &\longmapsto \chi(g) \end{aligned} \end{aligned}$$

é um isomorfismo natural.

A Transformada de Fourier

$$\begin{aligned}\widehat{f} : \widehat{\mathbb{R}} &\longrightarrow \mathbb{C}\\ \chi &\longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\chi(t)}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

- O que me impede de trocar $\mathbb{R}$ por G? Nada!

$$\begin{aligned}\widehat{f} : \widehat{G} &\longrightarrow \mathbb{C}\\ \chi &\longmapsto \int_{G} f(g)\overline{\chi(g)}\,\mathrm{d}g\end{aligned}$$

- Se $G = \mathbb{Z}$ então $\widehat{f}$ é a série de Fourier!
- Se $G = \mathbb{R}$ então $\widehat{f}$ é a transformada de Fourier na reta!
- Vale o teorema da inversão de Fourier!

$$f(g) = \int_{\widehat{G}} \chi(g)\widehat{f}(\chi)\,\mathrm{d}\chi$$

- $\widehat{G}$ forma uma *"base"* de $L^1(G)$

Exemplos

- Se G é um grupo de Lie abeliano conexo então

$$G \cong \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$$

- $\widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$
- $\widehat{\mathbb{S}^1} \cong \mathbb{Z}$
- $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- Todo abeliano grupo finito é auto-dual!

- A construção do grupo de caracteres é natural em um sentido categórico
- Podemos pensar nessa construção como um funtor

$$\widehat{\cdot} : \mathsf{GrpTop}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{GrpTop}$$
$$G \longmapsto \widehat{G}$$

Teorema (Pontryagin Revisitado)
O funtor acima se restringe a equivalências de categorias

$$\mathsf{LCAb}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\sim} \mathsf{LCAb}$$
$$\mathsf{Ab}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\sim} \mathsf{CAb}$$
$$\mathsf{FinAb}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\sim} \mathsf{FinAb}$$

Mais Exemplos

- A dualidade categórica implica automaticamente que todas as propriedades categóricas são refletidas pela dualidade
- Por exemplo,
$$\widehat{G \times H} \cong \widehat{G} \oplus \widehat{H} \cong \widehat{G} \times \widehat{H}$$
- Mais geralmente,
$$\widehat{\varprojlim G_i} \cong \varinjlim \widehat{G}_i \cong \varinjlim G_i$$
e podemos calcular o dual de todos os grupos pró-finitos abelianos!

Dualidade de Tannaka-Krein

- Pontryagin: podemos recuperar G de $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{S}^1)$ com estrutura de grupo topológico, desde que G seja abeliano e localmente compacto
- E se não for???
- Podemos tentar entender G através de suas representações complexas!
- Quando G é compacto, todas as representações são essencialmente unitárias, isto é, um morfismo $G \longrightarrow \mathrm{U}(n)$
- Quando G é abeliano, todas as representações irredutíveis tem dimensão 1, e portanto são morfismos $G \longrightarrow \mathbb{S}^1$, caráteres!
- Para o caso geral, teremos que estudar as todas as representações sem restrições na dimensão

- Então consideramos a caracterização do grupo de caráteres,

$$G \rightsquigarrow \mathrm{FinRep}(G)$$

onde $\mathrm{FinRep}(G)$ é uma *categoria monoidal com involução*:
  - **Objetos:** Representações de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$
  - **Flechas:** Transformações lineares G-invariantes
  - **Tensor:** Tensor $V \otimes W$ de representações
  - **Involução:** Leva uma ação na ação *dual* ou *contragradiente* V^*

Teorema (Teorema de reconstrução do Tannaka)
Se G for um grupo compacto*, então podemos recuperar G de* FinRep(G).

Teorema (Krein)
Dado uma estrutura monoidal com involução em $\mathbb{C}$-Vect *existe um grupo G induzindo esta estrutura* precisamente *quando*

- *Existe uma unidade para o tensor*

$$V \otimes E \cong E \otimes V \cong V$$

- *Todo objeto é a soma de elementos simples (categoria semisimples)*
- *Os homomorfismos entre os objetos simples tem dimensão 1 ou 0*

Tese de Tate

- Seria muito bom se pudéssemos usar essas ferramentas para estudar Teoria dos Números
- Problema:

$$\mathbb{Q} \cong \text{💩}$$

- Soluções
  (i) Usar p-ádicos e princípio Local-Global
  (ii) Mergulhar $\mathbb{Q}$ em um anel $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ tal que $\mathbb{Q}$ é discreto com a topologia induzida

Referências

[1] Jordan Bell. *The Pontryagin duals of $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ and $\mathbb{Q}$*. 2015. URL: `https://individual.utoronto.ca/jordanbell/notes/QPontryaginDual.pdf`.

[2] Robert J. Valenza Dinakar Ramakrishnan. *Fourier Analysis on Number Fields*. 1st ed. Graduate Texts in Mathematics v. 186. Springer, 1998.

[3] Rami Shakarchi Elias M. Stein. *Fourier analysis: an introduction*. Princeton Lectures in Analysis, Volume 1. Princeton University Press, 2003.

[4] Gerald B. Folland. *A course in abstract harmonic analysis*. 1st ed. Studies in advanced mathematics. CRC Press, 1995.

[5] Jacob Lurie. *Categorification of Fourier Theory*. 2015. URL: `https://www.youtube.com/watch?v=w3f8KEcv4RE`.

[6] nLab. *Pontryagin duality for torsion abelian groups*. 2020. URL: `https://ncatlab.org/nlab/show/Pontryagin+duality+for+torsion+abelian+groups`.