Grupo Monstro

Caíque, Lucas, Pablo, Ricardo & Sabrina

Fevereiro de 2021

Figure: Um monstro

Definição

O grupo Monstro $\mathbb{M}$ é...

NÃO

Citação

Nothing has given me the feeling I understand why the monster is there.

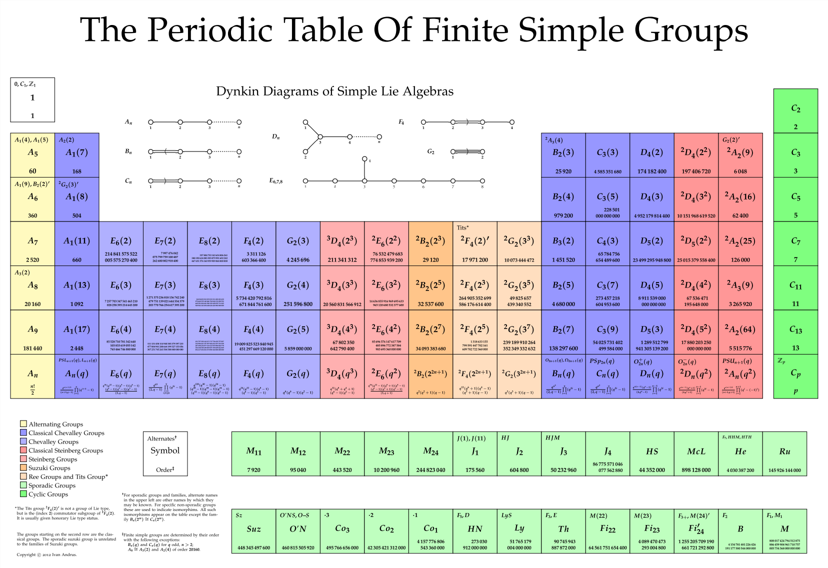
— John H. Conway

O Grupo Monstro

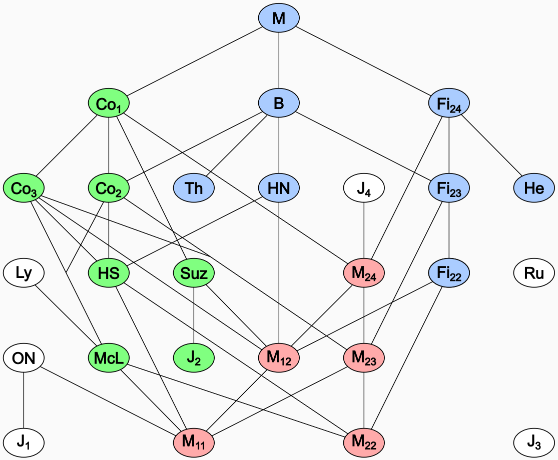
- Ok, então pra que estudar o Monstro?
  - O Monstro tem
    $$808017424794512875886459904961710757005754368000000000$$
    elementos.
  - Fodasse.
  - S_{100} tem 100! elementos e
    $$100! > 808017424794512875886459904961710757\ldots$$
  - $\mathbb{M}$ é simples.
  - $\mathbb{M}$ é o único grupo simples com
    $$808017424794512875886459904961710757005754368000000000$$
    elementos.

Grupos de Tipo Lie

- As álgebras de Lie complexas simples são classificadas pelos diagramas de Dynkin.
- A cada uma dessas álgebras, podemos associar um número finito de grupos de Lie complexos conexos.
- Um desses grupos, G_{ad} (num certo sentido "minimal"), sempre é simples (no sentido de não ter subgrupos normais), enquanto os outros grupos associados não são.
- Chevalley mostrou que podemos fazer algo parecido para um corpo finito $\mathbb{F}_q$: Dado um diagrama de Dynkin, podemos associar uma álgebra de Lie simples sobre $\mathbb{F}_q$ à esse diagrama, e um número finito de grupos, com um grupo G_{ad} "minimal".
- Com algumas exceções quando q é pequeno, G_{ad} é simples!
- Essa construção foi extendida por Steinberg, Suzuki e Ree, obtendo outros grupos simples finitos de tipo Lie.
- Existem outros grupos simples finitos?


The Periodic Table Of Finite Simple Groups
Dynkin Diagrams of Simple Lie Algebras
A_n B_n C_n D_n $E_{6,7,8}$ F_4 G_2
$0, C_1, \mathbb{Z}_1$ 1 1
$A_1(4), A_1(5)$ A_5 60
$A_2(2)$ $A_1(7)$ 168
$A_1(9), B_2(2)'$ A_6 360
${}^2G_2(3)'$ $A_1(8)$ 504
A_7 2 520
$A_1(11)$ 660
$E_6(2)$ 214 841 575 522 005 575 270 400
$E_7(2)$
$E_8(2)$
$F_4(2)$ 3 311 126 603 366 400
$G_2(3)$ 4 245 696
${}^3D_4(2^3)$ 211 341 312
${}^2E_6(2^2)$ 76 532 479 683 774 853 939 200
${}^2B_2(2^3)$ 29 120
Tits* ${}^2F_4(2)'$ 17 971 200
${}^2G_2(3^3)$ 10 073 444 472
$A_3(2)$ A_8 20 160
$A_1(13)$ 1 092
$E_6(3)$
$E_7(3)$
$E_8(3)$
$F_4(3)$ 5 734 420 792 816 671 844 761 600
$G_2(4)$ 251 596 800
${}^3D_4(3^3)$ 20 560 831 566 912
${}^2E_6(3^2)$
${}^2B_2(2^5)$ 32 537 600
${}^2F_4(2^3)$ 264 905 352 699 586 176 614 400
${}^2G_2(3^5)$ 49 825 657 439 340 552
A_9 181 440
$A_1(17)$ 2 448
$E_6(4)$
$E_7(4)$
$E_8(4)$
$F_4(4)$ 19 009 825 523 840 945 451 297 669 120 000
$G_2(5)$ 5 859 000 000
${}^3D_4(4^3)$ 67 802 350 642 790 400
${}^2E_6(4^2)$
${}^2B_2(2^7)$ 34 093 383 680
${}^2F_4(2^5)$
${}^2G_2(3^7)$ 239 189 910 264 352 349 332 632
A_n $\frac{n!}{2}$
$PSL_{n+1}(q), L_{n+1}(q)$ $A_n(q)$
$E_6(q)$
$E_7(q)$
$E_8(q)$
$F_4(q)$
$G_2(q)$ $q^6(q^6-1)(q^2-1)$
${}^3D_4(q^3)$
${}^2E_6(q^2)$
${}^2B_2(2^{2n+1})$ $q^2(q^2+1)(q-1)$
${}^2F_4(2^{2n+1})$
${}^2G_2(3^{2n+1})$ $q^3(q^3+1)(q-1)$
${}^2A_3(4)$ $B_2(3)$ 25 920
$C_3(3)$ 4 585 351 680
$D_4(2)$ 174 182 400
${}^2D_4(2^2)$ 197 406 720
$G_2(2)'$ ${}^2A_2(9)$ 6 048
$B_2(4)$ 979 200
$C_3(5)$ 228 501 000 000 000
$D_4(3)$ 4 952 179 814 400
${}^2D_4(3^2)$ 10 151 968 619 520
${}^2A_2(16)$ 62 400
$B_3(2)$ 1 451 520
$C_4(3)$ 65 784 756 654 489 600
$D_5(2)$ 23 499 295 948 800
${}^2D_5(2^2)$ 25 015 379 558 400
${}^2A_2(25)$ 126 000
$B_2(5)$ 4 680 000
$C_3(7)$ 273 457 218 604 953 600
$D_4(5)$ 8 911 539 000 000 000 000
${}^2D_4(4^2)$ 67 536 471 195 648 000
${}^2A_3(9)$ 3 265 920
$B_2(7)$ 138 297 600
$C_3(9)$ 54 025 731 402 499 584 000
$D_5(3)$ 1 289 512 799 941 305 139 200
${}^2D_4(5^2)$ 17 880 203 250 000 000 000
${}^2A_2(64)$ 5 515 776
$O_{2n+1}(q), \Omega_{2n+1}(q)$ $B_n(q)$
$PSp_{2n}(q)$ $C_n(q)$
$O^+_{2n}(q)$ $D_n(q)$
$O^-_{2n}(q)$ ${}^2D_n(q^2)$
$PSU_{n+1}(q)$ ${}^2A_n(q^2)$
C_2 2
C_3 3
C_5 5
C_7 7
C_{11} 11
C_{13} 13
$\mathbb{Z}_p$ C_p p
Alternating Groups
Classical Chevalley Groups
Chevalley Groups
Classical Steinberg Groups
Steinberg Groups
Suzuki Groups
Ree Groups and Tits Group*
Sporadic Groups
Cyclic Groups
Alternates† Symbol Order‡
M_{11} 7 920
M_{12} 95 040
M_{22} 443 520
M_{23} 10 200 960
M_{24} 244 823 040
$J(1), J(11)$ J_1 175 560
HJ J_2 604 800
HJM J_3 50 232 960
J_4 86 775 571 046 077 562 880
HS 44 352 000
McL 898 128 000
F_7, HHM, HTH He 4 030 387 200
Ru 145 926 144 000
Sz Suz 448 345 497 600
$O'NS, O\text{–}S$ $O'N$ 460 815 505 920
$\cdot 3$ Co_3 495 766 656 000
$\cdot 2$ Co_2 42 305 421 312 000
$\cdot 1$ Co_1 4 157 776 806 543 360 000
F_5, D HN 273 030 912 000 000
LyS Ly 51 765 179 004 000 000
F_3, E Th 90 745 943 887 872 000
$M(22)$ Fi_{22} 64 561 751 654 400
$M(23)$ Fi_{23} 4 089 470 473 293 004 800
$F_{3+}, M(24)'$ Fi'_{24} 1 255 205 709 190 661 721 292 800
F_2 B
F_1, M_1 M
*The Tits group ${}^2F_4(2)'$ is not a group of Lie type, but is the (index 2) commutator subgroup of ${}^2F_4(2)$. It is usually given honorary Lie type status.
The groups starting on the second row are the classical groups. The sporadic suzuki group is unrelated to the families of Suzuki groups.
Copyright © 2012 Ivan Andrus.
†For sporadic groups and families, alternate names in the upper left are other names by which they may be known. For specific non-sporadic groups these are used to indicate isomorphims. All such isomorphisms appear on the table except the family $B_n(2^m) \cong C_n(2^m)$.
‡Finite simple groups are determined by their order with the following exceptions: $B_n(q)$ and $C_n(q)$ for q odd, $n > 2$; $A_8 \cong A_3(2)$ and $A_2(4)$ of order 20160.

Os Grupos Esporádicos



Plano para a Classificação

- Como classificar os grupos simples finitos?

Teorema (Brauer-Fowler)
Dado um inteiro positivo n, existe apenas um número finito de grupos simples finitos não isomorfos contendo uma involução com centralizador de ordem n.

Teorema (Feit-Thompson)
Todo grupo de ordem ímpar é solúvel.

- Agora temos uma estratégia!

Prevendo o Monstro

- Muitos grupos esporádicos foram descobertos usando a estratégia de Brauer.
- Um deles foi o Monstro!

We present some evidence for the existence of a simple group F, called the "monster." It was discovered independently by Fischer and Thompson, and by the author. Our approach was to work from the following hypotheses [1]:

(A) F is a simple group containing nonconjugate involutions t, z.

(B) $C = C_F(z)$ is a 2-constrained group with structure $O_2(C) \cong 2_+^{1+24}$, $C/O_2(C) \cong \cdot 1$ (Conway's simple group).

(C) $H = C_F(t)$ has structure $H = H'$, $Z(H) = \langle t \rangle$ and $H/\langle t \rangle \cong F_2$, Fischer's $\{3,4\}$-transposition group (the "baby monster").

Construindo o Monstro

- Mas e aí, cadê o Monstro?

Figure: Monstro debaixo da cama

- Mas e aí, cadê o Monstro?

Figure: Monstro debaixo da cama

- Depois de achar o 196883, Griess conseguiu construir em 1982! [6]
- Com a tabela de caracteres, Griess teve uma ideia.
- Ele conseguiu construir uma álgebra de dimensão 196884 cujo grupo de automorfismos é o Monstro!
- O paper tem 102 páginas!

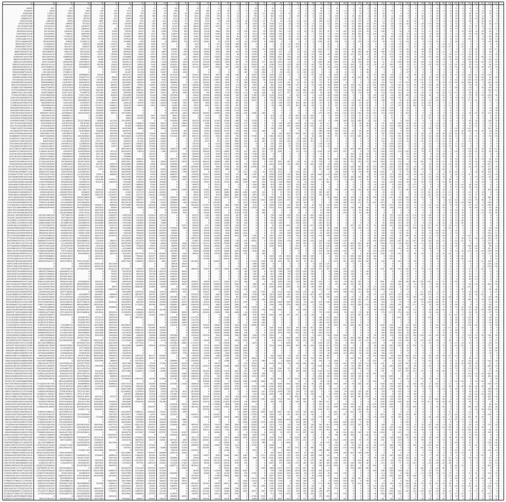


Figure: A Tabela de Caracteres do Monstro

A função j-invariante

Definição

$$j(\tau) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \cdots$$

com $q = e^{2\pi i\tau}$

$$\begin{aligned} 196884 &= 1 + 196883 \\ 21493760 &= 1 + 196883 + 21296876 \\ 864299970 &= 2 \cdot 1 + 2 \cdot 196883 + 21296876 + 842609326 \\ &\vdots \end{aligned}$$

- O *grupo modular* $\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})$ age em $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

Definição

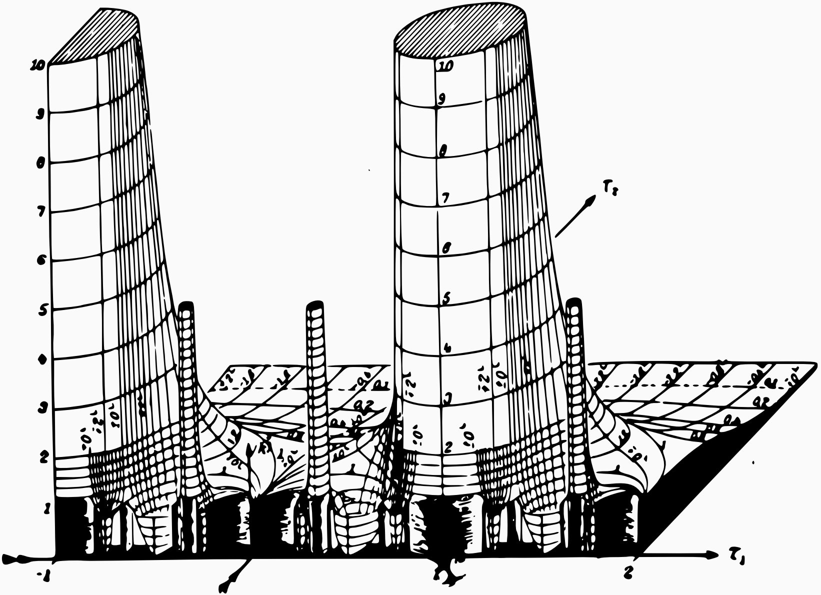
Uma função $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ é dita *função modular* se esta for

- Meromorfa em $\mathbb{H}$
- Invariante sob a ação de $\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})$ em $\mathbb{H}$
- Tem uma expansão de Fourier $f(\tau) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n \cdot q^n$, com $q = e^{2\pi i \tau}$

Teorema

Qualquer função modular para $\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})$ é uma função racional em $j(\tau)$.

Funções Modulares



Coincidências

Definição

$$\Gamma_0(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{SL}_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod{n} \right\}$$

e denotaremos por $\Gamma_0(n)^+$ seu normalizador.

- $\Gamma_0(n)^+$ age em $\mathbb{H}$ e o quociente $\mathbb{H}/\Gamma_0(n)^+$, para alguns valores de n, tem a estrutura de uma superfície de Riemann de genus zero, ou seja, uma esfera.
- Nesse caso, teremos uma estrutura algébrica gerada por *Hauptmoduln* ou *funções modulares principais*, sendo uma dessas

$$J(\tau) = j(\tau) - 744 = q^{-1} + 196884q + 21493760q^2 + \cdots$$

- Ademais, os únicos primos que geram tais funções são:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 47, 59, 71$$

- $|\mathbb{M}| = 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$

Teorema
Existe uma $\mathbb{M}$-representação graduada

$$V_\natural = \bigoplus_{i=-1}^{\infty} V_i$$

tal que

$$J(\tau) = \sum_{i=-1}^{\infty} \dim V_i \cdot q^i$$

Mais ainda, existe $V_\natural$ tal que

$$f_g(\tau) = \sum_{i=-1}^{\infty} \chi_{V_i}(g) \cdot q^i$$

é uma função modular principal [3] *e f_g é proporcional a J se, e somente se*

$$g = e$$

A prova

- Em 1980 A. O. L. Atkin, P. Fong e S. D. Smith mostraram a existência de uma representação virtual. [5] [11]
- Em 1988 I. B. Frankel, J. Lepowsky e A. Meurman construiram uma $\mathbb{M}$-representação graduada $V_\natural = \bigoplus_{i=-1}^{\infty} V_i$ tal que

$$J(\tau) = \sum_{i=-1}^{\infty} \dim V_i \cdot q^i$$

  e mostraram que $V_\natural$ tem a estrutura de uma *álgebra de vértices* cujo grupo de automorfismos é precisamente $\mathbb{M}$. [8]
- Em 1992 R. Borcherds provou que

$$f_g(\tau) = \sum_{i=-1}^{\infty} \chi_{V_i}(g) \cdot q^i$$

  é função modular principal. [1]

A Prova

- Em 1998 Borcherds recebeu a medalha Fields por suas contribuições na prova da conjectura de Mooshine

Citação

I was over the moon when I proved the moonshine conjecture.

— Richard Borcherds

Citação

I sometimes wonder if this is the feeling you get when you take certain drugs. I don't actually know, as I have not tested this theory of mine.

— Richard Borcherds

- Ok, mas segue a pergunta...

O que é o Monstro?

- Boa pergunta, mas da pra entender $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$

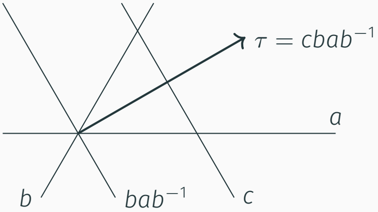
- Podemos associar a cada grafo, com vértices $v_1, \dots, v_k$, um grupo, chamado o grupo de Coxeter do grafo, dado por

$$\langle r_1, \dots, r_n : r_i^2 = 1, (r_i r_j)^{m_{ij}} = 1 \rangle$$

onde $m_{ij} = 3$ se v_i está conectado com v_j, e $m_{ij} = 2$ se não.
- Todo grupo de Coxeter G possui um subgrupo normal de índice 2, que expressamos como $\frac{1}{2}G$.
- Os grupos de Coxeter associados à maioria dos grafos é infinito. Como obter grupos finitos dessa maneira?

n-ciclos

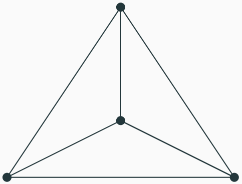
- Um n-ciclo é o grafo que é um polígono de n-lados
- O grupo de Coxeter G do 3-ciclo é o grupo gerado pelas seguintes reflexões:



- O elemento $\tau = cbab^{-1}$ é uma translação, e portanto tem ordem infinita.
- Se "insistirmos" que $\tau = 1$, formando um novo grupo G_1, esse grupo será finito.
- Como $c = bab^{-1}$ em G_1, o subgrupo finito $\langle a, b \rangle \subseteq G_1$ é isomorfo à G_1 (temos que $G_1 \cong S_3$).
- Podemos fazer algo parecido para qualquer n-ciclo.

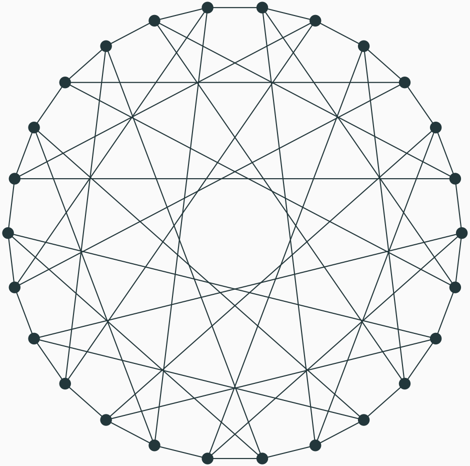
De K_4 a A_5

- Esse é o grafo K_4:



- O grupo de Coxeter G de K_4 é infinito!
- Um n-ciclo livre de um grafo é um n-ciclo onde cada vértice aparece apenas uma vez e é adjacente à exatamente dois outros vértices. Ele é maximal se o grafo não possui $(n+1)$-ciclos livres.
- Os n-ciclos maximais de K_4 são 3-ciclos, e são todos equivalentes sobre o grupo de simetrias de K_4.
- Se formarmos o grupo G_1 "insistindo" que as translações associadas a cada 3-ciclo sejam triviais, esse grupo possui apenas 2 elementos.
- Em vez disso, pedimos apenas que elas tenham ordem 2. Isso gera um grupo G_2 isomorfo á S_5, com $\frac{1}{2}G_2$ isomorfo à A_5

- Em vez de usarmos o grafo K_4, vamos usar o grafo $\mathsf{Inc}(\mathbb{P}_3)$:



O (Bi)Monstro

- Os ciclos livres maximais desse grafo são 12-ciclos, e são todos equivalentes sob o grupo de simetrias dele.
- Exigindo que as translações associadas a cada 12-ciclo sejam triviais, obtemos um grupo G_1.
- $G_1 \cong \mathbb{M} \wr 2$, o grupo Bimonstro!
- $\frac{1}{2}G_1 \cong \mathbb{M} \times \mathbb{M}$

Problemas em Aberto

- Quais são os subgrupos maximais do Monstro?
    - Os subgrupos maximais ditam importantes propriedades do grupo.
    - É uma forma de entender todos os subgrupos.
    - Atualmente (2017), são conhecidas 44 classes de conjugação de subgrupos maximais.
- Representações modulares do Monstro
    - Entender as representações modulares dos grupos simples é importante.
    - Só se sabe os caracteres de Brauer para $p = 17, 19, 23, 31$.
    - Não sabemos todas as árvores de Brauer dos blocos cíclicos do Monstro.
    - Não sabemos todas as matrizes de decomposição do Monstro.

Hirzebruch's Prize Question
Existe uma variedade compacta, orientável, diferenciável, que admite a ação do Monstro, cujo Witten-genus é

$$J(\tau) = j(\tau) - 744 = q^{-1} + 196884q + 21493760q^2 + \cdots$$

- Uma resposta positiva nos fornece mais informações sobre a álgebra de vértices do Monstro.

Nem tudo é o que parece ser...

Fenômeno Mirror-Moonshine
Mirror maps para certas curvas elípticas e famílias de superfícies K3 parecem ter relações com funções modulares principais do Monstro. Uma delas é

$$z(q) = q - 744q^2 + 356652q^3 - \cdots = j(\tau)^{-1}$$

- FALSO!!!!

- Mas o maior problema em aberto ainda é...

O que é o Monstro?

Citação

Nothing has given me the feeling I understand why the monster is there.

— John H. Conway

Referências I

[1] Richard E. Borcherds. "Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras". In: *Inventiones Mathematicae* 109.1 (Dec. 1992), pp. 405–444. DOI: https://doi.org/10.1007/bf01232032.

[2] Richard E. Borcherds. "WHAT IS the Monster?" In: *Notices of The American Mathematical Society* 49.9 (Oct. 2002), pp. 1076–1077. URL: https://www.ams.org/notices/200209/what-is.pdf.

[3] J. H. Conway and S. P. Norton. "Monstrous Moonshine". In: *Bulletin of the London Mathematical Society* 11.3 (1979), pp. 308–339. DOI: https://doi.org/10.1112/blms/11.3.308.

[4] Charles F. Doran. "Picard-Fuchs Uniformization and Modularity of the Mirror Map". In: *Communications in Mathematical Physics* 212.3 (Aug. 2000), pp. 625–647. DOI: 10.1007/s002200000228.

[5] Paul Fong. *Characters arising in the Monster-modular connection*. 1980.

[6] Robert L. Griess. "The friendly giant". In: *Inventiones mathematicae* 69.1 (Feb. 1982), pp. 1–102. DOI: 10.1007/bf01389186.

[7] Robert L. Griess. "THE STRUCTURE OF THE MONSTER SIMPLE GROUP". In: *Proceedings of the Conference on Finite Groups*. Elsevier, 1976, pp. 113–118. DOI: 10.1016/b978-0-12-633650-4.50016-3.

Referências II

[8] Arne Meurman Igor Frenkel James Lepowsky. *Vertex operator algebras and the Monster*. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 1989, pp. 1–508.

[9] Mark Ronan. *Symmetry and the monster: one of the greatest quests of mathematics*. Oxford University Press, 2006.

[10] Christopher S. Simons. “An Elementary Approach to the Monster”. In: *The American Mathematical Monthly* 112.4 (Apr. 2005), p. 334. DOI: 10.2307/30037469.

[11] Stephen D. Smith. *On the Head characters of the Monster*. 1982.

[12] Terrence Tao. *Notes on simple groups of Lie type*. URL: https://terrytao.wordpress.com/2013/09/05/notes-on-simple-groups-of-lie-type.