GRUPOIDES DE LIE,
REPRESENTAÇÕES E CONEXÕES

Hugo Portelinha

Instituto de Matemática e Estatística da USP

Grupoides

Geralmente, associamos grupos a simetrias de certo objeto. Por exemplo, se V é um espaço vetorial, o conjunto $GL(V)$ das transformações lineares inversíveis $V \to V$ é um grupo com a operação de composição.
Porém, existem casos onde isso não é possível.

Tome o fibrado tangente TM de uma variedade M. Vale a pena considerar

$$GL(TM) := \{\xi : T_pM \to T_qM \text{ isomorfismos} |\, p, q \in M\},$$

apesar deste conjunto não ter uma estrutura de grupo adequada.

Note porém que podemos definir duas funções $s, t : GL(TM) \to M$ por

$$s(\xi : T_pM \to T_qM) = p, \text{ e}$$
$$t(\xi : T_pM \to T_qM) = q.$$

Com isto, ξ pode ser composto com um $\eta : T_{q'}M \to T_rM$, na forma $\eta\xi$ se e somente se $s(\eta) = q' = q = t(\xi)$. Isto define uma multiplicação parcial, cujo domínio é

$$GL(TM) * GL(TM) := \{(\eta, \xi) : s(\eta) = t(\xi)\}.$$

Algumas propriedades dessa multiplicação lembram a de um grupo:

- para cada $p \in M$, existe um elemento $1_p \equiv \mathrm{id}_{T_pM}$ que age como uma identidade nas multiplicações possíveis;
- cada isomorfismo $\xi : T_pM \to T_qM$ possui uma inversa $\xi^{-1} : T_qM \to T_pM$ e

$$\xi\xi^{-1} = 1_q \text{ e } \xi^{-1}\xi = 1_p.$$

Definição 1.1 (grupoide)

Um *grupoide* é composto por dois conjuntos $\mathcal{G}$, chamado *grupoide*, e M, chamado *base*, munidos de

- $s, t : \mathcal{G} \to M$, chamadas *projeções de saída* e *término*, respectivamente;
- $m : \mathcal{G} * \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, $(g, h) \mapsto gh$ chamado *multiplicação*, com domínio

$$\mathcal{G} * \mathcal{G} := \{(g, h) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} : s(g) = t(h)\};$$

- $1 : M \to \mathcal{G}$, $x \mapsto 1_x$, chamada *identidade*;
- $i : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, $g \mapsto g^{-1}$, chamada *inversa*;

satisfazendo as compatibilidades

$$
\begin{array}{lll}
s(gh) = s(h), & t(gh) = t(g), & g(hj) = (gh)j, \\
s(1_x) = t(1_x) = x, & g1_{s(g)} = g, & 1_{t(g)}g = g, \\
g^{-1}g = 1_{s(g)}, & gg^{-1} = 1_{t(g)}. &
\end{array}
$$

É costume chamar um elemento de M de *objeto* e um de $\mathcal{G}$ de *flecha*. Também denotamos

- $g \in \mathcal{G}$ por $g : s(g) \to t(g)$;
- "$\mathcal{G} \rightrightarrows M$ "$\equiv$ um grupoide $\mathcal{G}$ com base M;
- $G_U \equiv s^{-1}(U)$, $G^V \equiv t^{-1}(V)$ e $G_U^V \equiv G_U \cap G^V$.

Perceba que G_x^x é um grupo (*de isotropia*), para todo $x \in M$.

Corolário 1.1.1

Um grupoide é uma categoria onde toda flecha é inversível.

Proposição 1.2

Sejam $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ um grupoide e $g, h, j \in \mathcal{G}$.

(a) Se $(g, h) \in \mathcal{G} * \mathcal{G}$ e $gh = g$, então $h = 1_{s(g)}$;

(b) Se $(j, g) \in \mathcal{G} * \mathcal{G}$ e $jg = g$, então $j = 1_{t(g)}$;

(c) Se $(g, h) \in \mathcal{G} * \mathcal{G}$ e $gh = 1_{t(g)}$, então $h = g^{-1}$;

(d) Se $(j, g) \in \mathcal{G} * \mathcal{G}$ e $jg = 1_{s(g)}$, então $j = g^{-1}$.

Corolário 1.2.1

Num grupoide $\mathcal{G} \rightrightarrows M$, as funções identidade $1 : x \mapsto 1_x$ e inversa $i : g \mapsto g^{-1}$ são únicas.

Definição 1.3 (grupoide de Lie)

Um *grupoide de Lie* é um grupoide $\mathcal{G} \rightrightarrows M$, onde ambos $\mathcal{G}$ e M são variedades diferenciáveis e as funções estruturais s, t, m, 1, e i são suaves, com $s, t : \mathcal{G} \to M$ submersões sobrejetoras.

Comentário. Por que a multiplicação $m : \mathcal{G}*\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ pode ser diferenciável?

$$\mathcal{G} * \mathcal{G} = (s \times t)^{-1}(\Delta_M) = (s \times t)^{-1}(\{(x,x)|x \in M\})$$

é uma subvariedade mergulhada de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$.

Exemplo (grupoide unital)

Toda variedade M pode ser vista como um grupoide de Lie $M \rightrightarrows M$

$$s = t = 1 = i = \mathrm{id}_M : x \mapsto x;$$

Exemplo (grupoide trivial)

Dados um grupo de Lie G e uma variedade M, podemos definir um grupoide de Lie $M \times G \times M \rightrightarrows M$

$$\begin{aligned}
&s : (x, g, y) \mapsto y, \\
&t : (x, g, y) \mapsto x, \\
&1 : x \mapsto (x, e, x), \\
&(x, g, y)(y, h, z) = (x, gh, z), \\
&(x, g, y)^{-1} = (y, g^{-1}, x).
\end{aligned}$$

Exemplo (grupo)

Caso, no grupoide trivial temos $M = \{*\}$, então vemos que todo grupo de Lie $G \rightrightarrows \{*\}$ é um grupoide de Lie

Exemplo (grupoide do par)

Caso, no grupoide trivial temos $G = \{*\}$, então vemos que $M \times M \rightrightarrows M$ é um grupoide cujas flechas são

$$(x, y) : y \to x$$

Exemplo (grupoide de submersão)

Se $\pi : M \to N$ é submersão sobrejetora, defina

$$M \times_\pi M := \{(x, y) \in M \times M : \pi(x) = \pi(y)\}.$$

$M \times_\pi M \rightrightarrows M$ é um grupoide de Lie com respeito às restrições dos mapas estruturais do grupoide do par.

Exemplo (grupoide de ação)

Se G é um grupo de Lie agindo em M, então definimos o grupoide de ação $G \ltimes M \equiv G \times M \rightrightarrows M$ por

$$\begin{aligned} &s : (g, x) \mapsto x \\ &t : (g, x) \mapsto gx \\ &1 : x \mapsto (e, x) \\ &(h, y)(g, x) = (hg, x), \text{ dado que } gx = y. \end{aligned}$$

Exemplo (grupoide linear geral)

Dado um fibrado vetorial $E \xrightarrow{\pi} M$,

$$GL(E) := \{\xi : E_x \to E_y \text{ isomorfismos lineares}\},$$

podemos definir um grupoide de Lie $GL(E) \rightrightarrows M$ como feito na introdução.
A estrutura diferenciável de $GL(E)$ é a seguinte: tome um atlas de trivializações locais $\{\psi_i : U_i \times V \to E_{U_i}\}$ de E e defina, para cada i, j

$$\begin{aligned} \phi_i^j : U_j \times GL(V) \times U_i &\to GL(E)_{U_i}^{U_j} \\ (y, A, x) &\mapsto \psi_j|_y \circ A \circ (\psi_i|_x)^{-1}. \end{aligned}$$

Deste modo, cada ϕ_i^j é uma bijeção e quaisquer $(\phi_k^l)^{-1} \circ \phi_i^j$ bem definido é um difeomorfismo, tendo $GL(E)$ então uma única estrutura de variedade suave tal que cada ϕ_i^j é um difeomorfismo.

Exemplo (grupoide fundamental)

Seja M uma variedade conexa e defina

$$\Pi(M) := \frac{\{\alpha : [0,1] \to M \text{ caminhos}\}}{\text{homotopia}}.$$

Obtemos um grupoide de Lie $\Pi(M) \rightrightarrows M$ se pusermos

$$\begin{aligned} s &: [\alpha] \mapsto \alpha(0) \\ t &: [\alpha] \mapsto \alpha(1) \\ 1 &: x \mapsto [\text{caminho constante em } x] \\ [\alpha][\beta] &= [\alpha * \beta] \text{ (concatenação)} \end{aligned}$$

Representações

Definição 2.1 (morfismo)

Dados grupoides (de Lie) $\mathcal{G} \rightrightarrows M$, $\mathcal{H} \rightrightarrows N$, um *morfismo* de grupoides (de Lie) são duas funções $F : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, $f : M \to N$ (suaves) compatíveis com os mapas estruturais, ie,

- $g : x \to y$ em $\mathcal{G} \Rightarrow F(g) : f(x) \to f(y)$ em $\mathcal{H}$;
- g, h podem ser compostos $\Rightarrow F(gh) = F(g)F(h)$.

Caso $M = N$ e $f = \mathrm{id}_M$, dizemos que o morfismo F *preserva a base*. Se F e f são bijeções (difeomorfismos), então dizemos ter um *isomorfismo* de grupoides (de Lie).

Corolário 2.1.1

Se $F : \mathcal{G} \to \mathcal{H}, f : M \to N$ é um morfismos de grupoides de Lie, então

(a) $F(1_x) = 1_{f(x)}, \forall x \in M$;

(b) $F(g^{-1}) = F(g)^{-1}, \forall g \in \mathcal{G}$.

A demonstração segue diretamente da Proposição 1.2.

Exemplo (1)

Se G e H são grupos de Lie, então morfismos de grupoides de Lie entre eles são exatamente morfismos de grupos de Lie.

Exemplo (2)

Considere os grupoides de submersão $M \times_\pi M$ e do par $M \times M$. Existe então um morfismo que preserva a base

$$\begin{aligned} F : M \times_\pi M &\to M \times M \text{ e } f = \mathrm{id}_M \\ (x, y) &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

Exemplo (3)

Sejam G e H grupos de Lie agindo nas variedades M e N. Se $\varphi : G \to H$ é um morfismo de grupos de Lie e $f : M \to N$ é um mapa equivariante em relação a φ (isto é, $f(gx) = \varphi(g)f(x)$), então é um morfismo

$$\begin{aligned} \varphi \times f : G \ltimes M &\to H \ltimes N \\ (g, x) &\mapsto (\varphi(g), f(x)). \end{aligned}$$

Definição 2.2 (ação)

Sejam $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ um grupoide de Lie e $\mu : E \to M$ uma função suave. Uma *ação* de $\mathcal{G}$ em E por μ é uma função suave

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \times_M E := \{(g,e) | s(g) = \mu(e)\} &\to E \\ (g,e) &\mapsto ge \end{aligned}$$

tal que

(a) $\mu(ge) = t(g)$;

(b) $g(he) = (gh)e$;

(c) $1_{\mu(e)}e = e$.

Comentário. Toda ação induz um grupoide de Lie $\mathcal{G} \times_M E \rightrightarrows E$, onde $(g,e) : e \to ge$ e

$$(g_2, e_2)(g_1, e_1) = (g_2 g_1 e_1, e_1)$$

quando $g_1 e_1 = e_2$.

Além disto, o diagrama a seguir comuta, de modo que temos um morfismo de grupoides de Lie entre $\mathcal{G} \times_M E$ e $\mathcal{G}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \times_M E \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{pr}_2"'] \arrow[d, shift left, "\text{ação}"] & \mathcal{G} \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\
E \arrow[r, "\mu"] & M
\end{tikzcd}$$

Note ainda que dada uma ação, cada $g : x \to y \in \mathcal{G}$ define um difeomorfismo entre fibras

$$g : E_x \to E_y, \quad e \mapsto ge.$$

Exemplo (1)

Se G é um grupo de Lie, então ações de grupoides de G são exatamente as suas ações de grupo.

Exemplo (2)

Um grupoide $\mathcal{G}$ age em si mesmo, pela função $\mu = t$, cuja ação é a própria multiplicação.

Exemplo (3)

Uma ação do grupoide de ação $G \ltimes M \rightrightarrows M$ em E por μ induz uma ação de grupo $G \times E$ com $ge = (g, \mu(e))e$ de modo que μ é equivariante.

Definição 2.3 (representação)

Sejam $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ um grupoide de Lie e $E \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado vetorial. Uma *representação* de $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ em E é uma ação por π tal que, para cada $g : x \to y$ em $\mathcal{G}$, os difeomorfismos

$$g : E_x \to E_y$$

são isomorfismos lineares.

Conexões

Uma *conexão* num fibrado vetorial $E \xrightarrow{\pi} M$ é uma função bilinear

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) &\to \Gamma(E) \\ (X, e) &\mapsto \nabla_X e \end{aligned}$$

satisfazendo

(a) $\nabla_{f \cdot X} e = f \nabla_X e$,

(b) $\nabla_X (fe) = f \nabla_X e + X(f) e$

para todos $X \in \mathfrak{X}(M)$, $e \in \Gamma(E)$ e $f \in C^\infty(M)$.

A *curvatura* de ∇ é então a função $K^\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathrm{End}(\Gamma(E))$ dada por

$$K^\nabla(X, Y) := \nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y].$$

Uma conexão é dita *plana* se $K^\nabla = 0$.

Além disso, se temos uma conexão ∇ em $E \to M$, para cada curva $\alpha : [0,1] \to M$ e cada $t_1, t_2 \in [0,1]$ temos um isomorfismo linear

$$P_\alpha^{t_1,t_2} : E_{\alpha(t_1)} \to E_\alpha(t_2) \tag{1}$$

tal que

$$P_\alpha^{t_2,t_3} \circ P_\alpha^{t_1,t_2} = P_\alpha^{t_1,t_3} \text{ e } P_\alpha^{t,t} = \mathrm{id}_{E_{\alpha(t)}}, \tag{2}$$

chamado de *transporte paralelo*.

Vimos também no curso que

Proposição 3.1

Se $K^{\nabla} = 0$ e $\alpha, \beta : [0,1] \to M$ são homotópicas, então

$$P_{\alpha}^{0,1} = P_{\beta}^{0,1}.$$

Dada uma variedade M conexa, nosso objetivo é mostrar que

$$\{E \to M \text{ munido de conexão plana}\} \leftrightharpoons \{\text{ representações de } \Pi(M)\}.$$

Por um lado, se temos $K^{\nabla} = 0$ para uma conexão ∇ em $E \xrightarrow{\pi} M$, defina a ação

$$\begin{aligned} \Pi(M) \times_M E &\to E \\ ([\alpha], e) &\mapsto P_{\alpha}^{0,1} e, \end{aligned}$$

que está bem definida justamente pela Proposição 3.1. Como $P_{\alpha}^{0,1} : E_{\alpha(0)} \to E_{\alpha(1)}$ é linear, obtemos uma representação do grupoide fundamental.

Por outro lado, se temos uma representação de $\Pi(M)$ em E, os isomorfismos lineares

$$[\alpha] : E_{\alpha(0)} \to E_{\alpha(1)}$$

satisfazem as condições de transporte paralelo, e portanto definem uma conexão.

Obrigado.