Módulos de Peso Irredutíveis

Thiago Brevidelli Garcia – Iryna Kashuba
`pablopie.xyz`
Dezembro de 2022

- Álgebras não-associativas

Definição
Uma k-álgebra de Lie é um k-espaço vetorial $\mathfrak{g}$ monido de um produto bilinear antissimétrico $[\,,\,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ satisfazendo a identidade de Jacobi.

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

$$V \text{ espaço vetorial} \quad \rightsquigarrow \quad \mathfrak{gl}(V) = \mathbf{End}(V) \text{ alg de Lie } / \ k$$

$$\mathfrak{gl}_n\mathbb{C} = \{\text{matrizes } n \times n\}$$
$$\mathfrak{sl}_n\mathbb{C} = \{X \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{C} : \mathbf{Tr}\, X = 0\}$$

$$\begin{aligned} A \text{ alg associativa} \quad &\rightsquigarrow \quad A\text{-mods} \\ \mathfrak{g} \text{ alg de Lie} \quad &\rightsquigarrow \quad \mathfrak{g}\text{-reps} \end{aligned}$$

Definição
Uma representação de $\mathfrak{g}$ é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial V munido de um operador linear $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ que preserva os colchetes.

$$[\rho(X), \rho(Y)] = \rho([X, Y])$$

$$\rho(X)v \rightsquigarrow X \cdot v, X \in \mathfrak{g}$$

- *Homomorfismo de representações*: $T(X \cdot v) = X \cdot Tv, \forall X \in \mathfrak{g}, v \in V$

Problema fundamental
Classificar todas as representações de $\mathfrak{g}$ a menos de isomorfismo.

Representações de $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[e, f] = h \qquad [h, f] = -2f \qquad [h, e] = 2e$$

- Toda $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$-rep V com $\dim V < \infty$ é soma direta de *irredutíveis*!

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, bend left] & V_{\lambda-2} \arrow[r, bend left, "e"] \arrow[l, bend left] & V_{\lambda} \arrow[r, bend left, "e"] \arrow[l, bend left, "f"] & V_{\lambda+2} \arrow[r, bend left] \arrow[l, bend left, "f"] & \cdots \arrow[l, bend left]
\end{tikzcd}$$

- V irredutível com $\dim V < \infty$

$$V = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V_{\lambda - 2k}$$

Dimensão finita

- Os autovalores de h em V formam uma cadeia ininterrupta de inteiros simétrica ao redor de 0

-4 -2 0 +2 +4

$$
\begin{tikzcd}
V_{-4} \arrow[r, bend left, "e"] & V_{-2} \arrow[r, bend left, "e"] \arrow[l, bend left, "f"] & V_0 \arrow[r, bend left, "e"] \arrow[l, bend left, "f"] & V_2 \arrow[r, bend left, "e"] \arrow[l, bend left, "f"] & V_4 \arrow[l, bend left, "f"]
\end{tikzcd}
$$

- V é completamente caracterizada pelo maior autovalor $\lambda \in \mathbb{Z}$ de h

Teorema
Se $\dim V < \infty$ *então* $V = \bigoplus_{i+j=n} \mathbb{C}x^i y^j \subset \mathbb{C}[x,y]$ *com*

$$e \cdot p = x\frac{d}{dy}p \qquad f \cdot p = y\frac{d}{dx}p \qquad h \cdot p = \left(x\frac{d}{dx} - y\frac{d}{dy}\right)p$$

Dimensão infinita

- E se $\dim V = \infty$?
- *Módulos de peso*:

$$V = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V_{\lambda - 2k}$$

- *Representações cuspidais*: f age injetivamente
- Se $\lambda \in \mathbb{C}$ *não* é um inteiro impar então $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ com

$$e \cdot p = \left(x^2 \frac{d}{dx} + \lambda x\right) p \quad f \cdot p = \left(-\frac{d}{dx} + \lambda x^{-1}\right) p \quad h \cdot p = 2x \frac{d}{dx} p$$

  é um $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$-módulo de peso cuspidal

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, bend left, "e"] & \mathbb{C}x^{-1} \arrow[l, bend left, "f"] \arrow[r, bend left, "e"] & \mathbb{C}x^{0} \arrow[l, bend left, "f"] \arrow[r, bend left, "e"] & \mathbb{C}x^{1} \arrow[l, bend left, "f"] \arrow[r, bend left, "e"] & \cdots \arrow[l, bend left, "f"]
\end{tikzcd}$$

- $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ age por operadores diferenciais $L \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}[x, x^{-1}]) = \mathbb{C}[x, x^{-1}, {}^{d}/_{dx}]$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{sl}_2\mathbb{C} \arrow[r, dashed] \arrow[rr, bend right] & \mathrm{Diff}(\mathbb{C}[x, x^{-1}]) \arrow[r] & \mathrm{End}(\mathbb{C}[x, x^{-1}]) \end{tikzcd}$$

- Módulos torcidos $\mathbb{C}[x, x^{-1}]^{\varphi_\mu}$

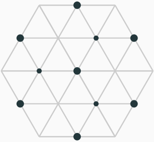
$$\begin{aligned} \varphi_\mu : \mathrm{Diff}(\mathbb{C}[x, x^{-1}]) &\longrightarrow \mathrm{Diff}(\mathbb{C}[x, x^{-1}]) \\ x^{\pm 1} &\longmapsto x^{\pm 1} \\ \frac{d}{dx} &\longmapsto \frac{d}{dx} + \mu x^{-1} \end{aligned}$$

Teorema
Todo $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$-módulo de peso cuspidal de dimensão infinita é da forma $\mathbb{C}[z, z^{-1}]^{\varphi_\mu}$.

Representações de Álgebras de Lie Semisimples

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{sl}_2\mathbb{C} & \rightsquigarrow & \mathfrak{g} \\ h & \rightsquigarrow & \mathfrak{h} \text{ subálgebra de Cartan} \\ \lambda \in \mathbb{C} & \rightsquigarrow & \lambda \in \mathfrak{h}^* \text{ “autovalores” da ação de } \mathfrak{h} \\ \mathbb{C}[x, x^{-1}]^{\varphi_\mu} & \rightsquigarrow & \text{famílias coerentes} \end{array}$$

- *Pesos*: $H \cdot v = \lambda(H) \cdot v \quad \forall H \in \mathfrak{h}$
- Os pesos de V são congruentes mod um reticulado $Q \subset \mathfrak{h}^*$



$\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$

- Toda cuspidal *encaixa* dentro de uma família coerente

$$\mathcal{M}(\lambda) = \bigoplus_{\mu + 2\mathbb{Z} \in \mathbb{C}/2\mathbb{Z}} \mathbb{C}[x, x^{-1}]^{\varphi_\mu}$$

Obrigado!

Referências

[1] William Fulton e Joe Harris. *Representation theory. A first course*. Corrected. Graduate Texts in Mathematics / Readings in Mathematics. Springer, 1991.

[2] Olivier Mathieu. "Classification of irreducible weight modules". Em: *Annales de l'institut Fourier* 50.2 (2000), pp. 537–592. DOI: `10.5802/aif.1765`.