UMA INTRODUÇÃO À GEOMETRIA NÃO COMUTATIVA

E O COMPLEXO DE DE RHAM

Guilherme Sobreira

19 de Dezembro de 2022

Dualidades Entre Álgebra e Geometria

- Dados espaços e especificadas propriedades de funções $X \longrightarrow \mathbb{C}$, temos um funtor contravariante

$$\mathrm{Espaços}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{C}\text{-}\mathrm{Alg}\,.$$

- Exemplos são:
  - Espaços topológicos e funções contínuas;
  - Varieades suaves e funções suaves;
  - Superfícies de Riemann e funções meromorfas.
- Podemos recuperar a estrutura de espaço olhando apenas para a álgebra de funções.

Exemplo
Existe uma antiequivalência de categorias

$$\text{Superfícies de Riemann compactas} \;\cong\; \text{Extensões finitas de } \mathbb{C}(t).$$

- Se X é espaço topológico compacto, sua álgebra de funções contínuas $C(X)$ é uma C^*-álgebra com unidade.

Definição
Uma $\mathbb{C}$-álgebra associativa A é uma C^*-álgebra se:

- Seu espaço vetorial subjacente é espaço de Banach;
- $||ab|| \leqslant ||a|| \, ||b||$ para todos $a, b \in A$;
- A possui uma involução $*\colon A \longrightarrow A$ tal que $||a^* a|| = ||a||^2$ para todo $a \in A$;
- Se A tem unidade, então $||1|| = 1$.

Exemplo

- Álgebras de operadores limitados em espaços de Hilbert;
- $C(X)$ com conjugação ponto a ponto e $|| \cdot ||_\infty$.

Teorema (Gelfand-Naimark)
Existe uma equivalência de categorias

$$\{\textit{Espaços Hausdorff compactos}\}^{\mathrm{op}} \cong \{C^*\textit{-álgebras comutativas com unidade}\}\,.$$

Heurística: pensamos em C^*-álgebras não comutativas como espaços de funções de "espaços não comutativos".

Objetivos:

- Ver quocientes por ações de grupo mal comportadas como espaços não comutativos;
- Tentar reescrever invariantes de geometria e topologia em termos de suas álgebras de funções.

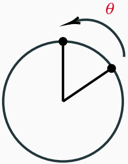
Quocientes não comutativos

ROTAÇÕES NO CÍRCULO

- Considere a ação de $\mathbb{Z} \circlearrowright S^1$ gerada pela rotação por $2\pi\theta$,

$$n \cdot z = e^{2\pi i n\theta} z.$$

- Se $\theta \in [0, 1]$ é racional, então as órbitas são subgrupos cíclicos e o quociente é S^1.
- Se θ é irracional, a órbita de todo ponto é densa. A topologia do quociente é trivial.



Ideia: No quociente, considerar a *forma* como identificamos dois pontos pela ação do grupo.

Definição
A *-álgebra de grupóide de um grupóide (discreto) $\mathscr{G}$ é o $\mathbb{C}$-espaço vetorial

$$\mathbb{C}\mathscr{G} = \bigoplus_{\alpha \in \mathscr{G}} \mathbb{C}\,\alpha$$

equipado com uma multiplicação

$$\alpha\beta = \begin{cases} \alpha \circ \beta & \text{se } s(\alpha) = t(\beta), \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e uma involução

$$\left(\sum_{\alpha} a_\alpha \alpha \right)^* = \sum_{\alpha} \overline{a_\alpha} \alpha^{-1}.$$

Exemplo
A álgebra do grupóide dos pares de um conjunto $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ é $M_n(\mathbb{C})$.

- Estamos interessados nas álgebras dos grupóides de ação $\mathscr{G} = A \rtimes G$.
- $\mathbb{C}\mathscr{G}$ é canonicamente isormorfo ao *produto cruzado* $A \rtimes_\alpha G$.

Definição
Seja $\alpha\colon G \longrightarrow Aut(A)$ um grupo localmente compacto agindo continuamente por $*$-automorfismos em uma C^*-álgebra A. Uma representação de (A, G, α) é um par de representações $\pi\colon A \longrightarrow \mathscr{B}(H)$ e $\rho\colon G \longrightarrow \mathscr{B}(H)$ tais que

$$\rho(g)\pi(a)\rho(g)^{-1} = \pi(\alpha_g(a)).$$

- O produto cruzado $A \rtimes_\alpha G$ será a C^*-álgebra cujas $*$-representações correspondem à representações de (A, G, α).

OS TOROS NÃO COMUTATIVOS

- A rotação por θ induz uma ação por pullbacks $\alpha_\theta\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut}(C(S^1))$ via

$$n \cdot f(z) = f\left(e^{2\pi i n\theta} z\right).$$

- Temos uma representação de $(C(S^1), G, \alpha)$ em $L^2(S^1)$, onde $\pi(a)f = af$ e $(\rho(n)f)(x) = f(x + n\theta)$.
- Pela propriedade universal, induzimos um mapa de C^*-álgebras

$$\pi \rtimes \rho\colon C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z} \longrightarrow \mathscr{B}(L^2(S^1)).$$

Uma Motivação Física

- Os operadores $p\colon H \longrightarrow H$ e $q\colon H \longrightarrow H$ de momento e posição na mecânica quântica satisfazem a *relação de comutação canônica*:

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i}\,\mathrm{Id}_H\,.$$

- Tomando as famílias a 1-parâmetro unitárias geradas por p e q, é possível verificar que

$$V_s U_t = e^{2\pi i hst} U_t V_s.$$

Definição
O toro não comutativo A_θ é a "menor" C^*-algebra com unidade satisfazendo

$$VU = e^{2\pi i\theta} UV.$$

Realização de A_θ: Defina $U, V\colon L^2(S^1) \longrightarrow L^2(S^1)$ como

$$(Uf)(x) = e^{2\pi i x} f(x) \quad \text{e} \quad (Vf)(x) = f(x+\theta).$$

- Note que $VU = e^{2\pi i\theta} UV$;
- Seja A_θ a menor C^*-álgebra de $\mathscr{B}(L^2(S^1))$ contendo U e V. Então

$$A_\theta = \overline{\left\{ \sum_{m,n} a_{mn} U^m V^n \,\middle|\, a_{mn} \in \mathbb{C} \right\}}.$$

Proposição
As C^*-álgebras A_θ e $C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ são isomorfas.

Teorema
Seja $\theta = p/q$ com p e q coprimos, e $q > 0$. Então $A_{\frac{p}{q}}$ é isomorfo à álgebra das seções contínuas $\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q$-invariantes de $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}^q$.

Homologia de Hochschild como Complexo de de Rham

Teorema (Connes)
Seja M uma variedade suave compacta. Então para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$HH_i^{\mathrm{cont}}(C^\infty(M)) \cong \Omega^i M.$$

- Pensamos a homologia de Hochschild de um espaço não comutativo como o *complexo de de Rham sobre esse espaço.*

- A homologia de Hochschild de um A-bimódulo M é a homologia do complexo

$$M \xleftarrow{\cdot} M \otimes A \xleftarrow{d_2} M \otimes A^{\otimes 2} \xleftarrow{d_3} \cdots$$

Onde $d_n : M \otimes A^{\otimes n} \longrightarrow M \otimes A^{\otimes (n-1)}$ é dado por

$$\begin{aligned} d_n(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = {} & ma_1 \otimes \cdots \otimes a_n \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \left((-1)^i m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \right) \\ & + (-1)^n a_n m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}. \end{aligned}$$

- Podemos substituir o complexo por complexos mais simples vendo a homologia de Hochschild como um *funtor derivado*.

Definição
Uma resolução projetiva de um B-módulo à esquerda M é uma sequência exata de B-módulos projetivos da forma

$$0 \longleftarrow M \xleftarrow{\varepsilon} P_0 \xleftarrow{d_0} P_1 \xleftarrow{d_1} \cdots$$

- Todo A-bimódulo M pode ser visto como um $A \otimes A^{\mathrm{op}}$-módulo à esquerda.

Fatos
Se $(P_i)_i$ é uma resolução projetiva de M como $A \otimes A^{\mathrm{op}}$-módulo, então a homologia de Hochschild coincide com a homologia do complexo

$$0 \longleftarrow A \otimes_{A\otimes A^{\mathrm{op}}} P_0 \xleftarrow{A\otimes d_0} A \otimes_{A\otimes A^{\mathrm{op}}} P_1 \xleftarrow{A\otimes d_1} \cdots$$

- No caso em que A é uma álgebra de Banach, pedir que os bimódulos sejam bimódulos de Banach garante que o complexo de Hochschild é contínuo, mas não é a abordagem correta.

Definição
Uma álgebra de Fréchet A é uma álgebra A que é espaço de Fréchet como espaço vetorial e cuja multiplicação é contínua.

Exemplo
A álgebra de funções suaves $C^\infty(M)$ é de Fréchet para M compacta.

- Para copiar a definição da homologia de Hochschild, precisamos do *produto tensorial projetivo* $V \widehat{\otimes} W$.

Definição
Seja M um A-módulo topológico. Uma resolução projetiva topológica é uma sequência exata de A-módulos topológicos projetivos

$$M \longleftarrow M_0 \xleftarrow{b_1} M_1 \xleftarrow{b_2} M_2 \longleftarrow \cdots$$

onde os diferenciais são contínuos e tais que existem mapas $\mathbb{C}$-lineares contínuos $s_i \colon M_i \longrightarrow M_{i+1}$ satisfazendo $b_{i+1}s_i + s_{i-1}b_i = \mathrm{id}$.

- Como antes, a homologia de Hochschild contínua independe da resolução fixada.

- O mapa canônico

$$C^\infty(M) \mathbin{\widehat{\otimes}} C^\infty(N) \longrightarrow C^\infty(M \times N)$$

é isomorfismo se M e N são compactas.

Proposição
A sequência exata

$$0 \longleftarrow C^\infty(S^1) \xleftarrow{\Delta^*} C^\infty(S^1 \times S^1) \xleftarrow{d} C^\infty(S^1 \times S^1) \longleftarrow 0$$

é uma resolução projetiva topológica de $C^\infty(S^1)$.

- Na sequência tensorizada, obtemos

$$0 \longleftarrow C^\infty(S^1) \xleftarrow{0} C^\infty(S^1) \longleftarrow 0.$$

- Logo $HH_i^{\mathrm{cont}}(C^\infty(S^1)) \cong \Omega^i(S^1)$.

Referências

[1] Alain Connes. “Noncommutative Differential Geometry”. Em: *Sci. Plub. Math* 62 (1985), pp. 41–144.

[2] Masoud Khalkhali. *Basic Noncommutative Geometry*. Ems Series of Lectures in Mathematics. European Mathematical Society, 2009.

[3] Wayne M Lawton. *Tutorial on Rational Rotation C^*–Algebras*. 2021. DOI: 10.48550/ARXIV.2111.02932. URL: https://arxiv.org/abs/2111.02932.