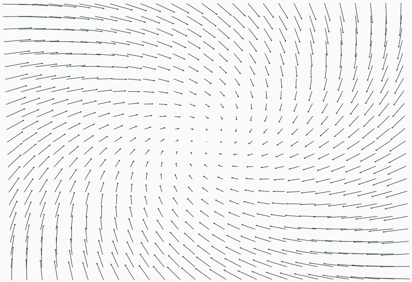
Geometria em Dimensão Infinita & o Fluido Ideal

Thiago Brevidelli
`pablopie.xyz`

Dezembro de 2022

- $X_t \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ campo de velocidades com $\operatorname{div} X_t = 0$
- $p_t \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ pressão



$$\frac{d}{dt} X_{t,i} + \sum_j X_{t,j} \frac{dX_{t,i}}{dx_j} = -\frac{dp_t}{dx_i}$$

A Equação de Euler

- M variedade Riemanniana orientada compacta
- $\operatorname{grad} f \in \mathfrak{X}(M)$ gradiente Riemanniano

$$\langle \operatorname{grad} f_q, v \rangle = df_q v \in T_{f(q)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$

- $\operatorname{div} X \in C^\infty(M)$ divergente associado à forma de volume μ

$$\mathcal{L}_X \mu = (\operatorname{div} X)\mu$$

- $X_t \in \mathfrak{X}(M)$ com $\operatorname{div} X_t = 0$
- $p_t \in C^\infty(M)$

$$\frac{d}{dt} X_{t,i} + \sum_j X_{t,j} \frac{dX_{t,i}}{dx_j} = -\frac{dp_t}{dx_i} \rightsquigarrow \frac{d}{dt} X_{t,q} + (\nabla_{X_t} X_t)_q = -(\operatorname{grad} p_t)_q$$

A Equação de Euler

$$\frac{d}{dt}X_{t,q} + (\nabla_{X_t}X_t)_q = -\operatorname{grad} p_t \tag{1}$$

- Queremos entender (1) em termos do fluxo φ_t de X_t

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(q) = X_{t,\varphi_t(q)}$$

$$\operatorname{div} X_t = 0 \iff \varphi_t^* \mu = \mu$$

- Subgrupo a 1-parâmetro $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \operatorname{Diff}_\mu(M)$

$$\frac{\nabla}{dt}\frac{d}{dt}\varphi_t(q) = \frac{d}{dt}X_{t,\varphi_t(q)} + (\nabla_{X_t}X_t)_{\varphi_t(q)} = -(\operatorname{grad} p_t)_{\varphi_t(q)}$$

$$\frac{\nabla}{dt}\frac{d}{dt}\varphi_t = -\operatorname{grad} p_t \circ \varphi_t$$

Variedades de Dimensão Infinita

$$\frac{\|f(q+h) - f(q) - df_q h\|}{\|h\|} \longrightarrow 0$$

- Cálculo em espaços de Banach!
- $f : U \subset V \longrightarrow W$ é C^1 se

$$\begin{aligned} df : U \times V &\longrightarrow W \\ (q, v) &\longmapsto df_q v \end{aligned}$$

  é contínua

$$d^n f : U \times V^n \longrightarrow W$$

- Variedades modeladas por espaços de Banach!
- $\mathrm{Diff}(M)$ *não* é variedade Banach!

Espaços de Fréchet

- *Espaços de Fréchet*: V completo gerado por uma família de seminormas

$$\{\|\cdot\|_n : V \longrightarrow \mathbb{R}\}_n$$

- Se $E \longrightarrow M$ é fibrado Euclidiano $\Gamma(E)$ é de Fréchet com

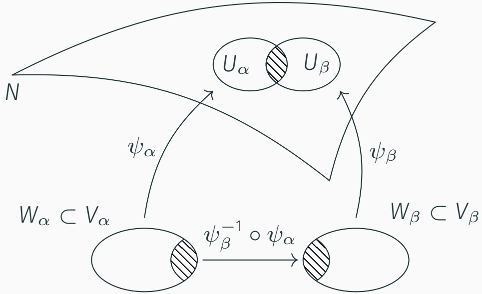
$$\|\xi\|_n = \sup_{q \in M} \|\xi_q\| + \sup_{q \in M} \|\nabla \xi_q\| + \cdots + \sup_{q \in M} \left\|\nabla^n \xi_q\right\|$$

- Cálculo de Bastiani

$$\frac{f(q+th) - f(q) - df_q(th)}{t} \longrightarrow 0 \; \forall h \in V$$

- O teorema da função implícita *falha* em espaços de Fréchet!
- O teorema do posto falha para variedades de Fréchet!

- Espaços modelados por espaços de Fréchet



- *O espaço modelo varia com o aberto do atlas!*
- Uma escolha de carta $U_\alpha \ni q$ induz uma topologia em $T_qN \cong V_\alpha$

A Geometria de $\mathrm{Diff}(M)$

- A topologia C^∞-compacto-aberto

$$\begin{aligned} C^\infty(M,N) &\longrightarrow \prod_{n=0}^{\infty} C^0(TM^n, TN) \\ f &\longmapsto (d^n f)_n \end{aligned}$$

- Quem é o espaço modelo de $C^\infty(M, N)$? $\Gamma(f^*TN)$!
- $W \subset TN$ vizinhança normal da seção nula

$$W_f = \{X \in \Gamma(f^*TN) : X_q \in W \ \forall q \in M\}$$
$$U_f = \{g \in C^\infty(M,N) : g(q) = \exp_{f(q)}(v_{f(q)}) \text{ para algum } v_{f(q)} \in W \ \forall q \in M\}$$

$$\begin{aligned} \psi_f : W_f \subset \Gamma(f^*TM) &\longrightarrow U_f \subset C^\infty(M,N) \\ X &\longmapsto \exp \circ X : M \longrightarrow N \\ &\qquad\qquad\qquad q \longmapsto \exp_{f(q)}(X_q) \end{aligned}$$

- A avaliação é suave

$$\begin{aligned} \mathrm{ev} : C^\infty(M, N) \times M &\longrightarrow N \\ (f, q) &\longmapsto f(q) \end{aligned}$$

- Lei exponencial

$$\begin{aligned} C^\infty(L, C^\infty(M, N)) &\xrightarrow{\sim} C^\infty(L \times M, N) \\ f &\longmapsto f^\wedge : L \times M \longrightarrow N \\ &\qquad\qquad (p, q) \longmapsto (f(p))(q) \end{aligned}$$

- $df_{\mathrm{id}}^* X = X \circ f$
- A composição $\circ : C^\infty(M, M) \times C^\infty(M, M) \longrightarrow C^\infty(M, M)$ é suave
- $\mathrm{Diff}(M)$ é grupo de Lie e a ação $\mathrm{Diff}(M) \curvearrowright M$ é suave!
- $\mathrm{Diff}_\mu(M)$ é subgrupo fechado e $T_f \, \mathrm{Diff}_\mu(M) \cong \Gamma_\mu(f^* TM)$

A métrica L^2

- A métrica L^2 em $\mathfrak{X}(M) \cong T_{\mathrm{id}} \operatorname{Diff}(M)$

$$\langle X, Y\rangle_{\mathrm{id}} = \int_M \langle X, Y\rangle \mu$$

- A métrica L^2 em $\operatorname{Diff}(M)$

$$\langle X, Y\rangle_f = \int_M \langle X \circ f^{-1}, Y \circ f^{-1}\rangle \mu$$

- A topologia da métrica L^2 é *mais fraca* do que a topologia de $\Gamma(f^*TM)$!

$$\begin{aligned} X^n \longrightarrow X \text{ em } \Gamma(f^*TM) &\implies X^n \longrightarrow X \text{ uniformemente} \\ (M \text{ é compacto}) &\implies X^n \longrightarrow X \text{ na métrica } L^2 \end{aligned}$$

- Existem derivadas covariantes
- A métrica L^2 admite spray metrico

$$\left(\frac{\nabla}{dt}\frac{d}{dt}\varphi_t\right)_q = \frac{\nabla}{dt}\frac{d}{dt}\varphi_t(q) = -(\operatorname{grad} p_t)_{\varphi_t(q)}$$

$$\frac{\nabla}{dt}\frac{d}{dt}\varphi_t = -\operatorname{grad} p_t \circ \varphi_t$$

- Dado $X \in \Gamma_\mu(\varphi_t^* TM)$ e $Y = X \circ \varphi_t^{-1} \in \mathfrak{X}_\mu(M)$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\nabla}{dt}\frac{d}{dt}\varphi_t, X \right\rangle_{\varphi_t} &= \langle -\operatorname{grad} p_t \circ \varphi_t, X\rangle_{\varphi_t} \\
&= -\int_M \langle \operatorname{grad} p_t, Y\rangle \, \mu \\
\text{(integração por partes)} &= -\int_M (\operatorname{div}(p_t Y) + \cancel{p_t \operatorname{div} Y})\mu \\
\text{(teorema do divergente)} &= 0
\end{aligned}$$

- A equação de Euler é a equação da geodésica em $\mathrm{Diff}_\mu(M)$!

Referências

[1] Boris Khesin e Robert Wendt. *The Geometry of Infinite Dimensional Groups*. 1ª ed. Springer, 2009.

[2] Wilhelm Klingenberg. *Riemannian Geometry*. De Gruyter Studies in Mathematics. De Gruyter, 2011.

[3] Alexander Schmeding. *An introduction to infinite-dimensional differential geometry*. arXiv, 2021. DOI: 10.48550/ARXIV.2112.08114.